# Práctico 2

Cálculo 3 - año 2014

Si $\gamma = \gamma(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$, los versores $\vec{t}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ (tangente, normal y binormal), la curvatura $k$ y la torsión $\tau$, pueden obtenerse mediante las suguientes fórmulas:

$$\vec{t} = \frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}, \quad \vec{b} = \frac{\dot\gamma \wedge \ddot\gamma}{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|}, \quad \vec{n} = b \wedge t = \frac{(\dot\gamma \wedge \ddot\gamma) \wedge \dot\gamma}{\|(\dot\gamma \wedge \ddot\gamma) \wedge \dot\gamma\|}, \quad k = \frac{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}, \quad \tau = \frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma\|^2}.$$

**1.** *Folio de Descartes.* Considere la curva $\quad x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Represente gráficamente y pruebe que $x^3 + y^3 = 3axy$ es una ecuación implícita para la curva. ¿Tiene puntos múltiples?

**2.** Parametrice por la longitud de arco cada una de las siguientes curvas. Calcule la curvatura, torsión y triedro de Frenet en un punto genérico. Halle el plano osculador de $\beta$.

(a) $\alpha(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t, t)$, (b) $\beta(t) = (t, t/\sqrt{2}, t^3/3)$, (c) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cosh t)$.

**3.** Considere la familia de curvas $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dada por $\alpha_\lambda(t) = (t^3 + \lambda t^2, 3t^3 - t, 5 - t)$. Determine los valores de $\lambda$ para los cuales la curva $\alpha_\lambda$ es plana.

**4.** Halle la cfa. osculatriz en un punto genérico de la hélice $\gamma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$; $a, b > 0$.

**5.** Sean $\gamma = \gamma(t)$ una curva, $\alpha = \alpha(s)$ la reparametrización de $\gamma$ respecto a la longitud de arco y $s = s(t)$ el cambio de variables tal que $\gamma(t) = \alpha(s(t))$.

(a) Pruebe que $\dfrac{d\vec{t}}{dt} = k\dot{s}\vec{n}$, donde $\vec{t}$ y $\vec{n}$ son los versores tangente y normal y $k$ la curvatura.

(b) Pruebe que $\ddot\gamma = \ddot{s}\vec{t} + k\dot{s}^2\vec{n}$ y concluya que la aceleración es un vector del plano osculador.

**6.** Pruebe que si $\alpha(s)$ es una curva de clase $C^3$, parametrizada por la longitud de arco y $k(s) \neq 0$ entonces $\tau(s) = \dfrac{(\alpha(s)', \alpha(s)'', \alpha'''(s))}{k(s)^2}$. (Sugerencia: de la segunda fórmula de Frenet se deduce que $\tau = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$.)

**7.** Analice cómo varían el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de una curva al invertir su orientación.

**8.** ¿Qué sucede con el triedro de Frenet de una curva en un punto en el que la velocidad y la aceleración sean colineales?

**9.** Sea $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^3$ y defínase $\vec{D} = \tau\vec{t} + k\vec{b}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) $\vec{n}' = \vec{D} \wedge \vec{n}$. (b) $\vec{b}' = \vec{D} \wedge \vec{b}$. (c) $\vec{D} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$.