

Práctico 1

Cálculo 3 - año 2014

1. Para cada una de las curvas halle una ecuación implícita y haga una representación gráfica indicando, cuando sea posible, su orientación. a, b, c y d son constantes positivas.

(a) $x = at + b, y = ct + d.$ (b) $x = a \cosh t, y = b \sinh t.$

(c) $x = \cos t, y = 0.$ (d) $x = a \sec t, y = b \tan t, t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2).$

[sol: a) $ay - cx = ad - bc.$ b) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1, x > 0.$ c) $y = 0, |x| \leq 1.$ d) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1.$]

2. Trace las siguientes curvas y encuentre sendas ecuaciones implícitas. En la primera curva halle asíntotas y en la segunda estudie concavidad para $a = 1$ y $b = 1/2.$

(a) $x = \frac{5at^2}{1+t^5}, y = \frac{5at^3}{1+t^5}.$ (b) $x = at + b \sin t, y = a - b \cos t.$

[sol: a) $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2.$ b) $x = \arccos((a-y)/b) + \sqrt{b^2 - (a-y)^2}.$]

3. Obtenga las ecuaciones de la tangente y la normal en los puntos señalados.

(a) $x = a \cos t, y = a \sin t,$ en $t = \pi/6.$ (b) $x = \sin 2t, y = \sin t,$ en $t = \pi/4.$

[sol: a) tang. $y = -\sqrt{3}x + 2a,$ norm. $y = x/\sqrt{3}.$ b) tang. $x = 1,$ norm. $y = 1/\sqrt{2}.$]

4. Demuestre que para una curva $x = f(t), y = g(t)$ la ecuación de la tangente en $t = t_0$ tiene la forma paramétrica $x = f(t_0) + \lambda f'(t_0), y = g(t_0) + \lambda g'(t_0).$ Obtenga una representación parecida para la normal a la curva.

5. Bosquejar y hallar la longitud de la siguiente curva plana. [sol: $(3 + \pi)/2$]

$$x = \begin{cases} \cos^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \sin(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases} \quad y = \begin{cases} \sin^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \cos(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

6. Demuestre que la curva $y = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \in (0, 1]; y = 0$ si $x = 0,$ no es rectificable.

7. Calcule la longitud de arco de las siguientes curvas [sol: a) $\sinh x_0.$ b) 6.]

(a) $y = \cosh x, x \in [0, x_0].$ (b) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

8. Encuentre el radio de curvatura para un punto genérico de las siguientes curvas, hallando los radios máximos y mínimos.

(a) $y = x^2.$ (b) $x = a \cos t, y = b \sin t.$

[sol: a) $\frac{1}{2}(1 + 4x^2)^{3/2},$ mín: $1/2.$ b) $\frac{1}{ab}(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2},$ mín y máx: b^2/a y $a^2/b.$]