9 DIAGRAMAS DE FASE

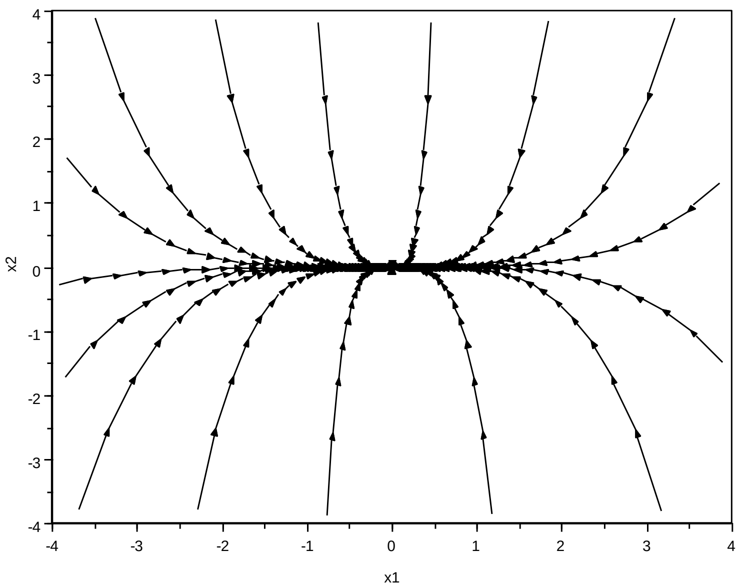
Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos variables de estado puede graficarse una contra la otra en un diagrama de fase. El tiempo no aparece en forma explícita.

Sea por ejemplo el sistema
$$\dot{x}_1 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = -4x_2$$

que tiene como solución de estado estacionario el punto (0,0). En este caso la solución es muy sencilla pues cada ecuación es independiente:

$$x_1(t) = x_{1o}e^{-t}$$
$$x_2(t) = x_{2o}e^{-4t}$$

En este caso para t tendiendo a infinito la solución (cualquiera) converge al punto (0,0). Si representamos una variable contra la otra obtenemos el siguiente diagrama de fase:

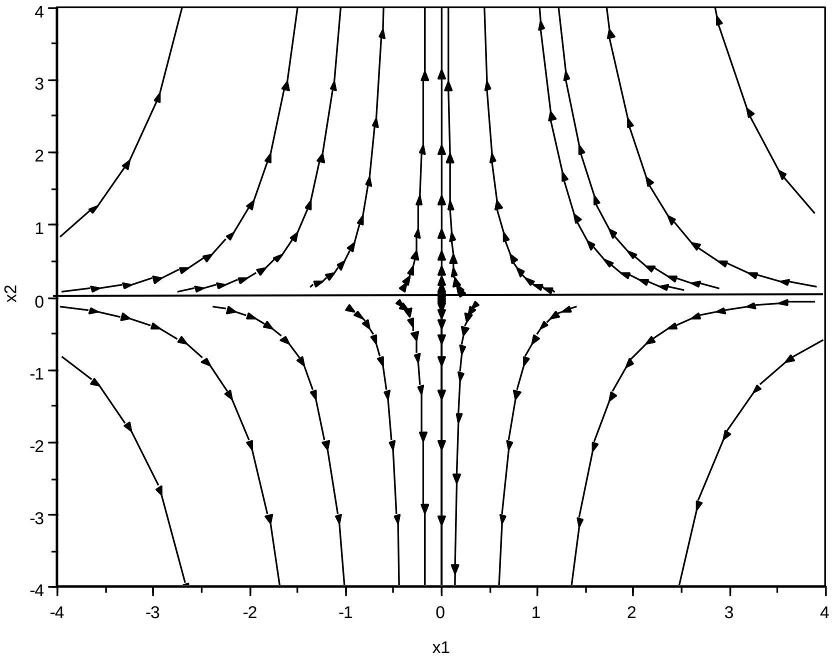


Este es un ejemplo de un diagrama de fases tipo *nodo* estable. Véase ‘ejem9.1’.

Por el contrario, el siguiente sistema es inestable (también con solución de estado estacionario (0,0):
$$\dot{x}_1 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = 4x_2$$

La solución es
$$x_1(t) = x_{1o}e^{-t}$$
$$x_2(t) = x_{2o}e^{4t}$$

En particular la variable x_2 diverge cuando t tiende a infinito y la solución (0,0) es inestable.



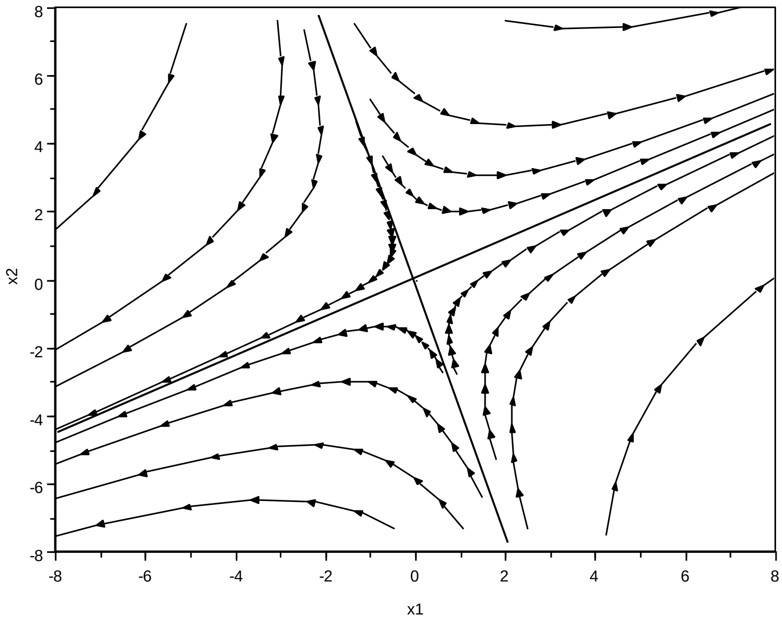
Véase ‘ejem9.2’. Los vectores propios (que coinciden con los ejes en este caso) definen las separatrices del diagrama de modo que ninguna de las trayectorias las cruza.

Otro sistema inestable tipo *silla de montar* es el siguiente:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

Que es de la forma $$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{A}\mathrm{x}$$

con $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$



Ver ‘ejem9.3’. Los valores propios del sistema son

$$\lambda_1 = -1.5616$$

$$\lambda_2 = 2.5616$$

El hecho de que uno de ellos sea positivo implica que el sistema es inestable.

Los vectores propios definen las separatrices del sistema

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0.2703 \\ -0.9628 \end{bmatrix}$$

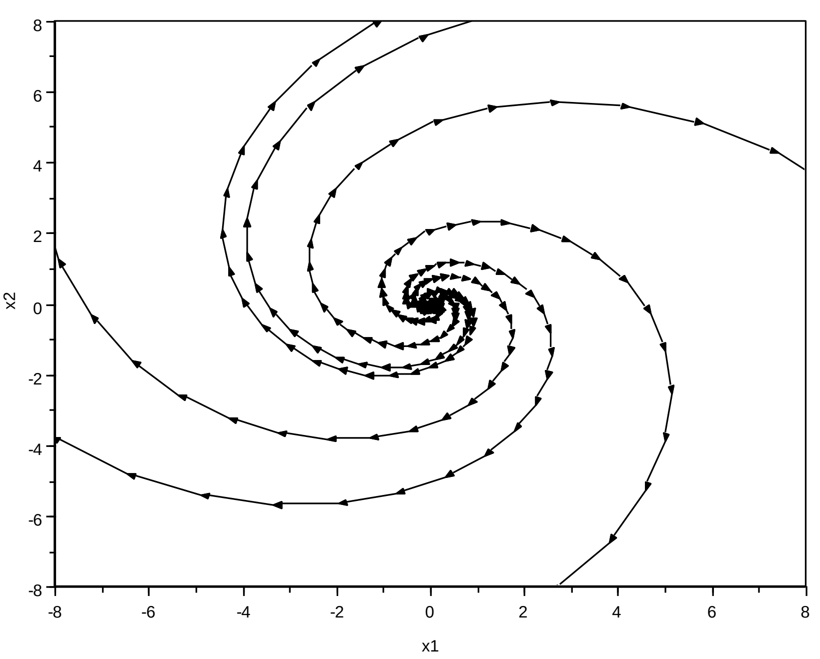
$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0.8719 \\ 0.4896 \end{bmatrix}$$

El segundo vector propio, asociado al valor propio positivo define el subespacio inestable.

El siguiente ejemplo corresponde a un *foco* (espiral) inestable

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$$



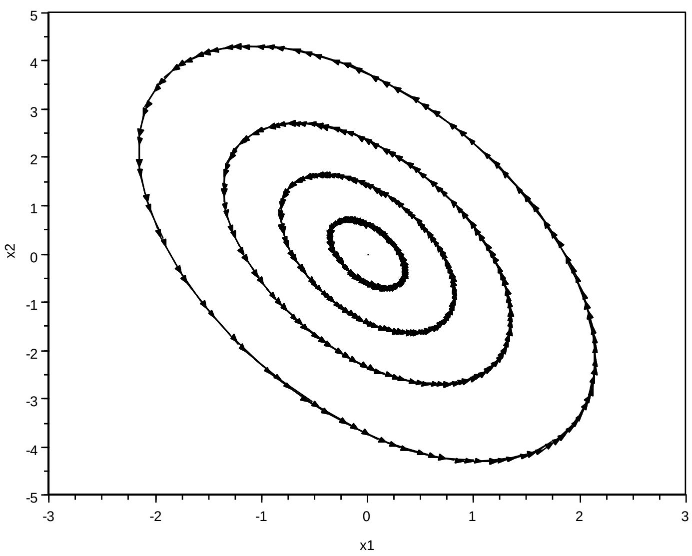
Ver ‘ejem9.4’. En este caso los valores propios son complejo conjugados:

$$\lambda = 1 \pm 2j$$

Cuando la parte real de los valores propios es nula tenemos el caso de un *centro*:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 + x_2$$

Ver ‘ejem9.5’. En este caso los valores propios son: $\lambda = 0 \pm 1.7321j$



Como generalización si tenemos un sistema de dos variables

$$\dot{x} = Ax$$

con $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

para el cálculo de los valores propios hacemos

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} =$$
$$= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

o sea
$$\lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{\left(tr(A)^2 - 4\det(A)\right)}}{2}$$

Al menos un valor propio es negativo si tr(**A**) < 0 ; los valores propios serán complejos si 4det(**A**) > tr(**A**)^2

Este resultado se puede expresar en forma gráfica en el siguiente diagrama.