Examen final de Cálculo I

UdelaR/FIng/IMERL

18 de diciembre de 2018

Los tres ejercicios son independientes entre sí. Las tres partes de cada ejercicio están pensadas para que las definiciones y los resultados enunciados en cada una sean útiles en las partes siguientes. Todas las respuestas deben estar correctamente fundamentadas en la teoría desarrollada en el curso.

1. (a) Enunciar el Teorema de Taylor con resto de infinitesimal.
   (b) Probar la unicidad del polinomio de Taylor.
   (c) i. Hallar el desarrollo de Taylor en 0 de orden $6n+3$ de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=\cos(x^3)$. Deducir que es el mismo que el desarrollo de orden $6n+5$.
       ii. Calcular las siguientes derivadas: $f^{(2016)}(0)$ y $f^{(6005)}(0)$.

2. (a) Se considera $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada.
       i. Sea P una partición de $[a,b]$. Definir suma superior y suma inferior de f asociada a P.
       ii. Definir qué significa que f sea Riemann-integrable.
       iii. Definir la integral de Riemann.
   (b) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Probar que f es integrable si y solo si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que la diferencia entre la suma superior y la suma inferior de f asociada a la partición P es menor que ε.
   (c) Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\in\mathbb{Q} \\ 2x & si \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$
   Probar que f no es Riemann-integrable.

3. (a) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Definir mínimo relativo y mínimo absoluto para f en un punto $x_0 \in D$.

(b) Sea f derivable en (a, b) con derivada estrictamente negativa. Probar que f es estrictamente decreciente en (a, b). ¿Es cierto el recíproco? Probar o refutar con un contraejemplo.

(c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $g(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$. Para cada $x \in (0, 1]$, sea t_x la recta tangente al gráfico de g en el punto de coordenadas $(x, g(x))$. Definimos $A : (0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $A(x)$ es el área del triángulo determinado por la recta t_x y los ejes de coordenadas Ox y Oy (ver figura). Se pide hallar $x_0 \in (0, 1]$ que minimice el área $A(x)$, justificando que el x_0 hallado la minimiza.

(**Sug.:** Observar que $A'(x) = \dfrac{(3x^2+1)p(x)}{q(x)}$ para ciertas expresiones $p(x)$ y $q(x)$).