Solución al examen de cálculo 1 propuesto el 19 de diciembre de 2017

UdelaR/FIng/IMERL

19 de diciembre de 2017

1. (a) Para cada real $x \neq 1$, probar por inducción completa:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{i=n} (i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

   (b) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida mediante la expresión $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Deducir de la parte anterior que el polinomio de Taylor de grado n de f en 0 es $T_{f,n,0}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} (i+1)x^i$.

   (c) Probar que si $r_n(x)$ es el resto del desarrollo de Taylor de orden n de f, entonces $|r_n(x)| < \dfrac{(n+2)|x|^{n+1}}{(1-x)^2}$ para todo $x > 0, x < 1$. Usar lo anterior para calcular $f(0.01)$ con un error menor que 10^{-4}.

2. (a) Sea $I = [a, b]$, sea $x_0 \in I$, y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Completar la siguiente definición:

$$f \text{ tiene mínimo absoluto en } x_0 \text{ si y sólo si...}$$

   (b) Supongamos además que f es derivable en I. Probar que si f tiene mínimo absoluto en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. ¿Es cierto esto si el mínimo se alcanza en $x_0 = a$? Probar o dar un contraejemplo.

   (c) Se desea armar con varillas de hierro una estructura con forma de prisma recto de base cuadrada, que encierre un volumen de 8m^3. Justificando el procedimiento, hallar las dimensiones de la estructura (lado de la base y altura) para que la cantidad de metros de varilla utilizados sea la mínima posible.

3. (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definir qué es una partición del intervalo $[a, b]$ y qué es un conjunto admisible para una partición de $[a, b]$.

   Definir $\mathrm{SR}(f, P, X_p)$, la suma de Riemann de f asociada a la partición P y el conjunto admisible X_P.

   (b) Se considera el volumen de la figura 1, obtenido al girar el gráfico de una función continua y positiva f en torno al eje ox:

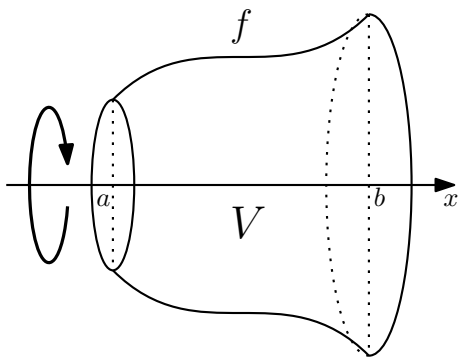

Fig. 1

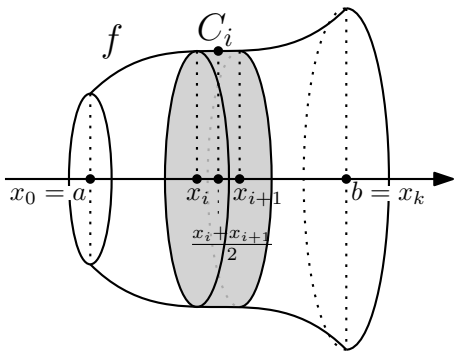

Fig. 2

   Se aproxima el volumen de revolución V mediante los cilindros de la figura 2, donde $\{x_0, \ldots, x_k\}$ es una partición P. Sea $V(P)$ La suma de los volúmenes de los cilindros $C_0, \ldots, C_{k-1}$. Aceptando que $V = \lim_{|P| \to o} V(P)$, probar que $V = \pi \displaystyle\int_a^b (f(t))^2 dt$.

   Sug.: Recordar que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{|P| \to 0} \mathrm{SR}(f, P, X_p)$. Esto significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |P| < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)dt - \mathrm{SR}(f, P, X_P) \right| < \varepsilon$$

   (c) Se define la función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 2) \\ (x-2)^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2} & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$

Calcular el volumen de la campana engendrada al girar el gráfico de f en torno al eje ox.

1. (a) <u>Base inductiva:</u> Para $n=0$, $\sum_{i=0}^{i=n}(1+i)x^i = 1$ y $\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{x^2-2x}{(1-x)^2} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1} = 1$. Entonces los miembros izquierdo y derecho de la igualdad son iguales a 1 y, por lo tanto, iguales entre sí.

<u>Paso inductivo:</u> Supongamos que el resutlado se cumple para n, es decir que:

$$\textsc{Hipótesis de Inducción:}\ \sum_{i=0}^{i=n}(1+i)x^i = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Debemos probar que el resultado se cumple para $n+1$, esto es:

$$\textsc{Tesis de Inducción:}\ \sum_{i=0}^{i=n+1}(1+i)x^i = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+2)x^{n+3}-(n+3)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}(1+i)x^i = \sum_{i=0}^{i=n}(1+i)x^i + (n+2)x^{n+1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+2)x^{n+1}$$

Llevando toda la expresión al denominador común $(1-x)^2$, obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}(1+i)x^i = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(x^2-2x+1)(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} =$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x^{n+3}-2(n+2)x^{n+2}+(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} =$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n+2)x^{n+3}-(n+3)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Lo que prueba la tesis de inducción.

(b) Por la parte anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{i=n}(i+1)x^i + \frac{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Donde $\sum_{i=0}^{i=n}(i+1)x^i$ es un polinomio de grado n. Aplicando la unicidad del polinomio de Taylor, para probar que $\mathrm{T}_{f,n,0}(x) = \sum_{i=0}^{i=n}(i+1)x^i$ basta con probar que $\dfrac{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ es el resto del desarrollo de orden n en 0, esto es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2}}{x^n(1-x)^2} = 0$$

La suma de infinitésimos equivale al infinitésimo de menor orden (es decir, el que decrece más lento), de modo que:

$$(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2} \sim_{x\to 0} (n+2)x^{n+1}$$
$$x^n(1-x)^2 \sim_{x\to 0} x^n$$

Entonces:

$$\frac{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2}}{x^n(1-x)^2} \sim_{x\to 0} \frac{(n+2)x^{n+1}}{x^n} = (n+2)x \to_{x\to 0} 0$$

lo cual concluye la prueba.

(c) Como $0 < x < 1$ aplicando la monotonía del producto tenemos que $x^{n+2} < x^{n+1}$, de donde $(n+1)x^{n+2} < (n+2)x^{n+1}$. De esto último deducimos que $0 < (n+2)x^{n+1} - (n+1)x^{n+2} < (n+2)x^{n+1} - 0 = (n+2)x^{n+1}$. Entonces:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{(n+2)x^{n+1} - (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}\right| < \frac{(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

que es lo que queríamos probar.

Ahora buscamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|r_n(0.01)| = |r_n(10^{-2})| < 10^{-4}$. Por la acotación recién probada, basta con hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{(n+2)10^{-2n-2}}{\left(1-\frac{1}{100}\right)^2} < 10^{-4}$. Calculando tenemos que: $\dfrac{(n+2)10^{-2n-2}}{\left(1-\frac{1}{100}\right)^2} = \dfrac{(n+2)10^{-2n-2}}{\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \dfrac{(n+2)10^{-2n-2}10^4}{99^2} = \dfrac{(n+2)10^{-2n+2}}{99^2}$. Por otra parte, $\dfrac{(n+2)10^{-2n+2}}{99^2} < 10^{-4}$ si y sólo si $(n+2)10^{-2n+6} < 99^2$.

- Para $n = 0$, $\quad 2 \times 10^6 \not< 99^2$ (porque $10^6 > 10^4 = 100^2 > 99^2$). Por lo tanto el desarrollo de orden 0 no aproxima como queremos.
- Para $n = 1$, $\quad 3 \times 10^4 \not< 99^2$ porque $10^4 > 99^2$. Por lo tanto el desarrollo de orden 1 no aproxima como queremos.
- Para $n = 2$, $\quad 4 \times 10^2 < 10^3 < 11^2 \times 9^2 = 99^2$ (porque $10^2 < 11^2$ y $10 < 81 = 9^2$). Por lo tanto, el desarrollo de orden 2, aproxima como queremos.

Una aproximación como la pedida es $\mathrm{T}_{f,2,0}(10^{-2}) = 1 + 2\times 10^{-2} + 3\times 10^{-4} = 1,0203$. Cualquier desarrollo de orden superior a 2 también cumple lo pedido.

2. (a) f tiene mínimo absoluto en x_0 si y sólo si $\forall x \in I \quad f(x_0) \leq f(x)$.

(b) Como f es derivable en x_0, si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f'(x_0) > 0$ o biern $f'(x_0) < 0$. Supongamos que $f'(x_0) > 0$.

Como $0 < f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

En particular, si elegimos $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ tenemos que $x_1 - x_0 < 0$, de donde $f(x_1) < f(x_0)$, lo que contradice que f tenga mínimo absoluto en x_0. De modo similar se procede si $f'(x_0) < 0$, pero eligiendo ahora un punto $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ y concluyendo que $f(x_2) < f(x_0)$.

Observar de la demostración que para llegar a una contradicción en los dos casos, es necesario que existan puntos del dominio I a ambos lados del punto x_0. Si consideramos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x$, f presenta un mínimo absoluto en 0 y, sin embargo $f'(0) = 1$. Por lo tanto, la propiedad no se cumple si el punto x_0 no es interior al dominio de la función.

Observar también que el resultado apenas si requiere de que el mínimo sea relativo, ya que la contradicción se obtiene en un entorno de x_0.

(c) Sea ℓ la longitud del lado de la base y sea h la altura del prisma recto (expresados en metros). Entonces, el volumen encerrado dentro del prisma es $V(\ell, h) = \ell^2 \times h$ y la suma de las longitudes de las aristas (longitud total de las varillas) es $L(\ell, h) = 8\ell + 4h$. Por hipótesis, el volumen debe ser igual a $8m^3$, de modo que: $\ell^2 \times h = 8$, de modo que las soluciones posibles satisfacen $h = \dfrac{8}{\ell^2}$. Substituyendo en la fórmula de L, obtenemos una expresión para L que sólo depende de ℓ, a saber: $L\left(\ell, \dfrac{8}{\ell^2}\right) = 8\ell + \dfrac{32}{\ell^2}$. Como lo que queremos es minimizar la longitud total de varillas a utilizar, basta entonces con minimizar la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(\ell) := 8\ell + \dfrac{32}{\ell^2}$. Observar que como ℓ representa una longitud, el dominio donde tiene sentido considerarla es el conjunto de los reales positivos.

Como $\mathbb{R}^+$ es un abierto y f es derivable, si el mínimo absoluto existe, se debe producir en una raíz de f'. Aplicando el algoritmo de derivación a f, obtenemos que $f'(x) = 8 - \dfrac{64}{\ell^3} = 8(1 - \dfrac{8}{\ell^3})$ que se anula sólo cuando $\ell^3 = 8$, es decir, cuando $\ell^3 - 8 = 0$. Puesto que $2^3 = 8$, este polinomio admite la raíz 2. Dividiendo $\ell^3 - 8$ entre $x - 2$ obtenemos: $\ell^3 - 8 = (\ell - 2)(\ell^2 + 2\ell + 4)$. El discriminante del cociente es $\Delta = 4 - 16 < 0$, de donde la única raíz real de f' es 2.

Como $f'(3) > 0$ y $f'(1) < 0$, el signo de f' es negativo en $(0, 2)$ y positivo en $(2, +\infty)$, de donde la función f presenta un mínimo absoluto en 2. Concluimos entonces que cuando la base tiene longitud $2m$, se obtiene el prisma recto que minimiza la longitud total de las varillas. Observar que como $h = \dfrac{8}{\ell^2} = \dfrac{8}{4} = 2$, el prisma recto es el cubo de lado $2m$.

3. (a) Una partición del intervalo $[a, b]$ es una sucesión finita de puntos $(x_0, \dots x_k)$ donde $x_0 < \cdots < x_k$ con $x_0 = a$ y $x_k = b$. Un conjunto admisible para $P = (x_0, \dots, x_k)$ es una sucesión finita de puntos $(p_0, \dots p_{k-1})$ tal que para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$ se tiene que $p_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
Dada una partición $P = (x_1, \dots x_k)$ de $[a, b]$ y un conjunto $X_P = (p_1, \dots, p_k)$ admisible para P, se define la suma de Riemann de f asociada a la partición P y el conjunto admisible X_P como $\mathrm{SR}(f, P, X_P) := \sum_{i=0}^{i=k-1} f(p_i)(x_{i+1} - x_i)$.

(b) El cilindro C_i tiene radio $f\Big(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)$ y altura $x_{i+1} - x_i$, de donde su volumen es:

$$\pi\Big(f\big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\big)\Big)^2 (x_{i+1} - x_i)$$

La partición P define los cilindros $C_0, \dots, C_{k-1}$ y la suma de los volúmenes de ellos es:

$$V(P) := \pi \sum_{i=0}^{i=k-1} \Big(f\big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\big)\Big)^2 (x_{i+1} - x_i)$$

Definimos $X_P = \Big(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dots, \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}\Big)$. Para cada i, $\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ es el punto medio de $[x_i, x_{i+1}]$, entonces X_P es un conjunto admisible para P.
Por definición de suma de Riemann, $V(P) = \pi\,\mathrm{SR}(f^2, P, X_P)$ y, aplicando la sugerencia:

$$\lim_{|P| \to 0} \pi\,\mathrm{SR}(f^2, P, X_P) = \pi \int_a^b (f(t))^2 dt$$

de modo que $V = \lim_{|P| \to 0} V(P) = \pi \displaystyle\int_a^b (f(t))^2 dt$, que es lo que queríamos demostrar.

(c) La función F es continua en $[0, 2)$ y en $(2, 3]$. Además

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{x} = \sqrt{2} = \lim_{x \to 2^+} (x-2)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \sqrt{2} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ y, entonces, f es continua en 2 (lo cual verifica que estamos en las hipótesis en las que enunciamos la fórmula para el volumen de revolución).
Aplicando la fórmula hallada para el volumen, obtenemos que:

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^3 (f(t))^2 dt = \int_0^2 (f(t))^2 dt + \int_2^3 (f(t))^2 dt = \int_0^2 t \;\; dt + \int_2^3 \big((t-2)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(t-2) + \sqrt{2}\big)^2 dt$$

Como ambas expresiones para la función f definen funciones continuas, estamos en condiciones de aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo:

- $\displaystyle\int_0^2 t \; dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$
- $\displaystyle\int_2^3 \big((t-2)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(t-2) + \sqrt{2}\big) \;\; dt = \int_2^3 (t-2)^4 + \frac{(t-2)^2}{8} + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(t-2)^3 + 2\sqrt{2}(t-2)^2 + t - 2 \;\; dt = \int_2^3 (t-2)^4 + \frac{(t-2)^3}{\sqrt{2}} + \frac{1 + 16\sqrt{2}}{8}(t-2)^2 + t \;\; dt = \frac{(t-2)^5}{5}\Big|_2^3 + \frac{(t-2)^4}{4\sqrt{2}}\Big|_2^3 + \frac{1 + 16\sqrt{2}}{24}(t-2)^3\Big|_2^3 + \frac{t^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1 + 16\sqrt{2}}{24} + \frac{5}{2} = \frac{27}{10} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1 + 16\sqrt{2}}{24}$

Sumando obtenemos que el volumen es: $\left(\frac{47}{10} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1+16\sqrt{2}}{24}\right)\pi$.