Solución al examen de cálculo 1 propuesto el 21 de julio de 2017

UdelaR/FIng/IMERL

21 de julio de 2017

1. (a) **Enunciar el Teorema de Taylor con la fórmula del resto de Lagrange.** Sea $f : [a, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ $n+1$-veces derivable en $[a, a+\varepsilon)$. Entonces para todo $x \in [a, a+\varepsilon)$ existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \quad + \quad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

   Observación: En las notas, este teorema está enunciado con $c \in [a, x]$. Esto es evidentemente consecuencia del enunciado que dimos arriba. Pero el enunciado que dimos arriba da más información sobre el punto c y no requiere cambiar la demostración del teorema.

   (b) **Consideremos la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(1+x)$. ($\log$ es el logaritmo neperiano, es decir, el logaritmo en base e). Demostrar por inducción completa que para todo $n \geq 1$ la derivada de orden n de f es**

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

   Hallar el polinomio de Taylor de f de orden n en el punto 0, y la expresión del resto de Lagrange en este caso. Justificar todos los cálculos. Probaremos esta propiedad por el principio de inducción completa.

   - Base inductiva: para $n = 1$. $f^{'}(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^0.0!}{(1+x)^1}$, que tiene la forma del enunciado cuando $n = 1$.
   - Paso inductivo: Suponemos que la propiedad se cumple para un natural n (hipótesis de inducción) y probamos que se cumple para $n+1$ (tesis de inducción). Entonces, la hipótesis de inducción es: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{(1+x)^n}$. Derivando $f^{(n)}$, obtenemos: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{-n}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Entonces probamos que $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, que es la tesis de inducción.

   (c) **Demostrar que con el polinomio de Taylor de f de orden 11 en el punto 0 es posible calcular $\log(2)$ con un error menor a $1/10$.** Aproximar un valor funcional mediante el polinomio de Taylor no es otra cosa que evaluar el polinomio en lugar de la función. El error viene dado por el resto, el cual podremos acotar gracias a la expresión explícita que nos da el enunciado de Taylor-Lagrange. Veamos concretamente en qué consiste este plan:

   La función a considerar es $f(x) = \log(1+x)$. Como queremos aproximar $\log(2)$, evaluaremos f en $x = 1$. Entonces, para un desarrollo de orden n la forma del resto de Lagrange es $\frac{f^{(n+1)}(c)1^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(1+c)^{(n+1)}(n+1)}$, siendo la primera igualdad consecuencia de aplicar la parte b del ejercicio. Para cada orden de derivación n, el punto c que elegimos y que viene dado por el teorema satisface $0 < c < 1$, de modo que $1 < 1+c$ y entonces $1 < (1+c)^{n+1}$.

   El error que cometemos es por exceso cuando n es impar (porque el resto es negativo) y por defecto cuando n es par (porque el resto es positivo). Como queremos acotar el error sin importar su signo,

debemos considerar su valor absoluto: $\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}(n+1)} < \dfrac{1}{n+1}$. En definitiva, para probar que el error es menor que $1/10$ basta con probar que $1/(n+1) \leq 1/10$, lo que equivale a probar que $n+1 \geq 10$. Si $n = 11$ esta propiedad se satisface (de hecho vale a partir de $n = 9$).

Observación: Si usamos el enunciado tal como aparece en las notas, $0 \leq c \leq 1$, de modo que $1 \leq 1+c$ y entonces se precisa que $1/(n+1) < 1/10$, lo que equivale a probar que $(n+1) > 10$, lo cual vale para 11 y, de heho, vale a partir de $n = 10$.

2. (a) **Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Completar las siguientes frases:**

f es derivable en $x_0 \in (a,b)$ si y sólo si existe y es finito el límite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. **Y en ese caso, la derivada de f en x_0 es** $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

f presenta un máximo relativo en $x_0 \in [a,b]$ si y sólo si $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0)$.

f presenta un máximo absoluto en $x_0 \in [a,b]$ si y sólo si $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0)$.

(b) **Probar que si f tiene un extremo absoluto en un punto $x_0 \in [a,b]$, entonces tiene un extremo relativo en dicho punto. Probar que si f es derivable en (a,b) y tiene un extremo relativo en $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.**

Si f presenta un extremo absoluto en x_0, entonces $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0)$. En particular, dado cualquier $\delta > 0$ se tiene que si $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$, entonces $f(x) \leq f(x_0)$. Concluimos entonces que $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0)$ (de hecho, vale para cualquier $\varepsilon > 0$).

Supongamos por absurdo que $f'(x_0) = L > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. En particular $\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap [a,b] \quad f(x) > f(x_0)$ (y estos puntos x existen porque x_0 es interior al dominio $[a,b]$) y por lo tanto, f no presenta un máximo relativo en x_0. También $\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cap [a,b] \quad f(x) < f(x_0)$ (y estos puntos x existen porque x_0 es interior al dominio $[a,b]$) y por lo tanto, f tampoco presenta un mínimo relativo en x_0.

Concluimos que suponer que la derivada en x_0 es positiva es absurdo. Si suponemos que la derivada es negativa, llegamos a una contradicción de la misma forma.

(c) **Una forma usual para las copas de vermouth es la de la fig. 1. Se trata de un cono invertido, puesto sobre un pie.**

El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura. El área lateral del cono es $A = \pi r g$, donde g es la generatriz (ver fig. 2).

fig. 1

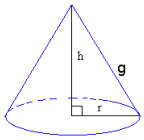


fig. 2

Se desea fabricar una copa con una cantidad fija de cristal, lo que determina que el área lateral del cono es igual a una constante A_0. Hallar, en función de A_0, el valor de r que maximiza el volumen de la copa fabricada. Sugerencia: A los efectos de simplificar sensiblemente los cálculos, maximizar V^2 (lo cual equivale a maximizar V, puesto que $x \mapsto x^2$ es creciente en $\mathbb{R}^+$).

Vamos a usar la información para expresar el volumen en función del radio y luego estudiar el crecimiento de la función V. Para lograr esto hay que expresar h en función de r. Aplicando el teorema de Pitágoras el triángulo rectángulo de la figura 2, tenemos que $h = \sqrt{g^2 - r^2}$. Todavía falta entonces expresar g en

función de r. Como asumimos que todas las copas "solución" tienen área lateral A_0 constante, podemos despejar $g = \dfrac{A_0}{\pi r}$. Entonces, substituyendo g en la expresión hallada para h y esta en la de V, obtenemos:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{A_0^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{\pi r^2}{3\pi r}\sqrt{A_0^2 - \pi^2 r^4} = \frac{1}{3} r \sqrt{A_0^2 - \pi^2 r^4}$$

Siendo la penúltima igualdad consecuencia de calcular el denominador común dentro de la raíz cuadrada.
Adoptando la sugerencia, podemos eliminar la raíz cuadrada, todo lo cual nos permite estudiar una función polinómica en r:

$$V^2(r) = (1/9)r^2(A_0 - \pi^2 r^4) = (1/9)A_0 r^2 - \pi^2 r^6$$

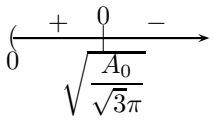
Al derivar obtenemos:

$$(V^2)'(r) = (1/9)(2rA_0^2 - 6\pi^2 r^5) = (1/9)r(2A_0^2 - 6\pi^2 r^4)$$

Una raíz de la derivada es $r = 0$, que corresponde a una copa "degenerada" cuyo volumen es vacío (y, por lo tanto, no es solución).
Entonces, estudiaremos las raíces del factor $F(r) = (2A_0^2 - 6\pi^2 r^4)$. De hecho, como r es positivo, el signo de la derivada donde importa es el signo de este factor.
Buscamos entonces r positivos tales que $6\pi^2 r^4 = 2A_0^2$. Tomando raíz cuadrada, tenemos que:

$$r^2 = \frac{\sqrt{2}A_0}{\sqrt{6}\pi} = \frac{A_0}{\sqrt{3}\pi}$$

Siendo la última igualdad resultado de expresar $\sqrt{6}$ como $\sqrt{2.3} = \sqrt{2}\sqrt{3}$. Entonces, la única raíz estrictamente positiva de la derivada es: $r = \sqrt{\dfrac{A_0}{\sqrt{3}\pi}}$.
Veamos ahora que efectivamente en esa raíz hay un máximo absoluto:
$F(r)$ equivale a $-6\pi^2 r^4$ en $+\infty$, de modo que $\lim_{r\to+\infty} F(r) = -\infty$. Además, $F(0) = 2A_0^2 > 0$.
Como $F(r)$ es continua por ser un polinomio, por Bolzano sólo puede cambiar de signo al pasar por una raíz. De modo que el signo de F –y por lo tanto de $(V^2)'$– es:



Todo lo cual muestra que V^2 presenta un máximo absoluto en $r = \sqrt{\dfrac{A_0}{\sqrt{3}\pi}}$ y por lo tanto, V también.

3. (a) **Enunciar y probar que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable. Sugerencia: usar que toda función continua en un compacto es uniformemente continua.**

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es integrable en $[a, b]$

<u>Demostración:</u> Para probarlo, por la definición de integral de Riemann, basta con probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe P partición de $[a, b]$ tal que $S_{f,P} - s_{f,P} < \varepsilon$ (criterio probado en el curso).

Sea $P = (x_0, \ldots, x_n)$ una partición de $[a, b]$. Entonces:

$$S_{f,P} - s_{f,P} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{f,P,i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{i=n} m_{f,P,i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{i=n} (M_{f,P,i} - m_{f,P,i})(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_{f,P,i} = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_{f,P,i} = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Si pudiéramos acotar las diferencias $(M_{f,P,i} - m_{f,P,i}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, entonces tendríamos que

$$S_{f,P} - s_{f,P} < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Todo se reduce entonces a hallar una partición $P = (x_0, \ldots, x_n)$ tal que $(M_{f,P,i} - m_{f,P,i}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$.

Como f es continua y $[a, b]$ es compacto, entonces es uniformemente continua. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Sea $P = (x_0, \ldots, x_n)$ una partición de $[a, b]$ de norma menor a δ. Entonces para todo i tal que $1 \leq i \leq n$ tenemos que $(M_{f,P,i} - m_{f,P,i}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, lo cual termina la prueba.

(b) **El monumento a Luis Battle Berres es una "U" hecha de hormigón con un revestimiento hecho de granulado de granito (fig. 3). Dicha "U" se define mediante dos parábolas, que son los gráficos de dos funciones a las que llamaremos $f(x)$ y $g(x)$. Las dimensiones aproximadas del monumento, expresadas en metros, vienen dadas por la fig. 4: La función g es de la forma $g(x) = ax^2$ para algún a real. Como $g(5) = 30$, tenemos que $a.25 = 30$, de donde $a = 6/5$.**

fig. 3

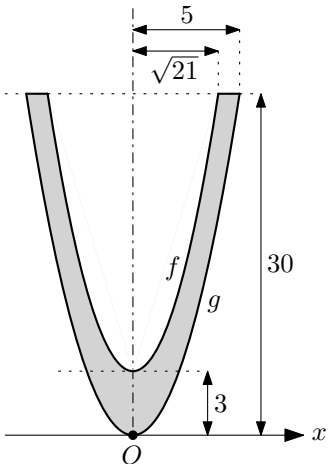


fig. 4

Determinar las expresiones de las funciones f y g, justificando el resultado.

La función f es de la forma $f(x) = bx^2 + c$ para algún b y algún c reales, puesto que es una parábola de eje $(x = 0)$. Como $f(0) = 3$, tenemos que $c = 3$. Como $f(\sqrt{21}) = 30$, tenemos que $b.21 + 3 = 30$, de donde $b = 9/7$.

(c)(c.1) **Calcular el área (en m^2) de la cara frontal del monumento. Sugerencia: para facilitar los cálculos, usar la descomposición expresada en la fig. 5:**

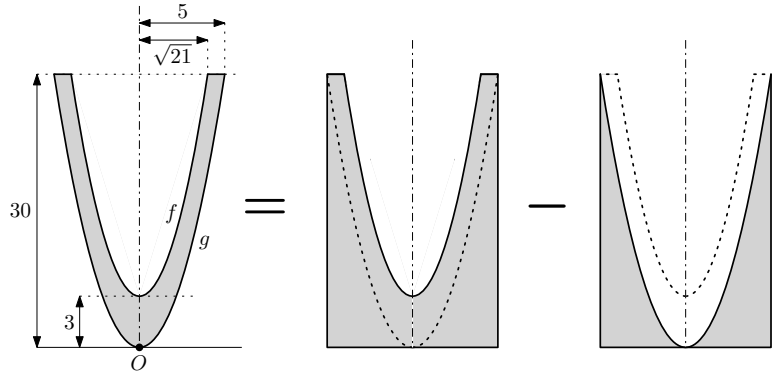


fig. 5

Se justificarán los cálculos de todas las áreas involucradas.

(c.2) **Asumiendo que el espesor del monumento es uniforme e igual a 2 metros (ver fig. 6), y que su densidad es igual a** $2300\,\mathbf{kg/m^3}$**, calcular el volumen del monumento (en m^3) y su masa (en kg).**

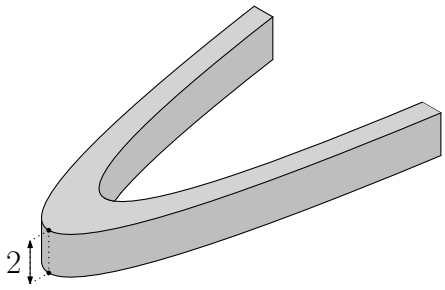


fig. 6

Si aprovechamos la simetría del problema, basta con calcular el área de la parte con $x > 0$ y duplicarla. Usando la descomposición de la sugerencia, tenemos que el minuendo vale:

$$\int_0^{\sqrt{21}} f + \int_{\sqrt{21}}^{5} 30 = \Big(\int_0^{\sqrt{21}} ((9/7)x^2 + 3)dx\Big) + 30(5 - \sqrt{21}) = (3/7)(\sqrt{21})^3 + 3\sqrt{21} + 30(5 - \sqrt{21})$$

que se puede expresar como $150 - 18\sqrt{21}$.

Por otra parte, el sustraendo es:

$$\int_0^5 g = \int_0^5 (6/5)x^2 dx = (2/5)5^3 = 50$$

La diferencia entonces es $100 - 18\sqrt{21}$. Como el área pedida en m^2 es el doble de la hallada, es: $200 - 36\sqrt{21}$.

El volumen es a su vez, en m^3: $2 \times (200 - 36\sqrt{21}) = 400 - 72\sqrt{21}$.

Por último, la masa en Kg es: $2300 \times (400 - 72\sqrt{21})$.