Porpuesta de solución al examen parcial de Cálculo 1 propuesto el 1 de julio de 2017

UdelaR/FIng/IMERL

1. (a) Teorema de Taylor con resto Infinitesimal:
   Sea n un natural positivo y $f : [a, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ n-veces derivable en $[a, a+)$. Entonces:
   i. Existe un único polinomio $T_{f,n,a}(h)$ de grado menor o igual a n tal que $r : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida como $r(h) := f(a + h) - T_{f,n,a}(h)$ satisface $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$.
   ii. $T_{f,n,a}(h) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i$.

   Observación: En las notas el teorema se enuncia con un polinomio de grado n. Evidentemente la definición de grado de un polinomio que hay que usar para que eso sea cierto no es la usual. Validaremos esta respuesta pues no hicimos en todos los teóricos el mismo énfasis en este asunto. Sin embargo, remarcamos que, por ejemplo, el polinomio de Taylor de orden $2n + 1$ en 0 de $\cos(x)$ tiene grado $2n$, ya que las derivadas de orden impar del coseno son nulas.

   (b) Aplicando el teorema de Taylor para la función f en el punto 0 tenemos:
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + r(x)$$
   donde $r(x)$ verifica que $\lim_{x\to 0} \dfrac{r(x)}{x^n} = 0$. Entonces
   $$f(x^p) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^{kp} + r(x^p)$$
   Dado que $\lim_{x\to 0}(x^p) = 0$, tenemos que $\lim_{x\to 0} \dfrac{r(x^p)}{x^{np}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{r(x^p)}{(x^p)^n} =$ 0 por ser límite de una composición (observar que $x^p = 0$ si y sólo si

$x = 0$). Entonces, por la unicidad del polinomio de Taylor, $\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^{kp}$ es el polinomio de Taylor pedido.

(c) Aplicando la parte anterior, el polinomio de Taylor de orden $4n$ de g es $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} x^{4k}$. El polinomio tiene sólo monomios de grado múltiplo de 4. Entonces, el término de grado 99 de este polinomio es nulo y por lo tanto $g^{(99)}(0) = 0$. El monomio de grado 100 se obtiene en la sumatoria con el índice $k = 25$, de modo que el monomio de grado 100 es $\frac{1}{25!} x^{100}$. Por definición del polinomio de Taylor el monomio de grado 100 es $\frac{g^{(100)}(0)}{100!} x^{100}$. Igualando los monomios deducimos que $g^{(100)}(0) = \frac{100!}{25!}$.

2. (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y continua en $c \in [a, b]$. Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_a^x f$. Entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Observación: Como vimos en el curso, las funciones integrables no tienen porqué ser continuas ni siquiera seccionalmente continuas. En las notas tienen un enunciado de este teorema en el caso particular en que el integrando f es continuo (y por lo tanto integrable). Sin embargo, la prueba que está en las notas funciona igual con las hipótesis más generales que escribimos arriba. Validaremos igualmente ambos enunciados, aunque uno tiene una restricción innecesaria. Una observación que se hace necesaria en el caso del enunciado general es que una función que es integrable en un intervalo, lo es en cualquier subintervalo (inmediato a partir de la definición). Eso garantiza que la función F está definida en el intervalo $[a, b]$, ya que f es integrable en cualquiera de los $[a, x]$. Cuando la hipótesis es que la f es continua, esta observación es innecesaria ya que las restricciones f a $[a, x]$ también son continuas y, por lo tanto, integrables.

(b) La función h es $F \circ g$ donde $F(x) := \int_a^x f$. Por el Toerema Fundamental del Cálculo Integral, F es derivable y $F' = f$. Aplicando la regla de la cadena, tenemos que $h = F \circ g$ es derivable y $h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ para todo $x \in [c, d]$.

(c) La función h es un caso particular de lo anterior, donde $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(x) = x^3$. La función f es continua por ser compuesta de funciones continuas (la exponencial y el polinomio $-t^2$). La función g es derivable y por lo tanto estamos en las hipótesis de la parte anterior. Entonces h es derivable y su derivada es $h'(x) = e^{-x^6} 3x^2$, cuyo signo es el signo de x^2 (ya que la exponencial es positiva). Así tenemos una única raíz de la derivada en 0, que no es ni máximo ni mínimo relativo (o local), ya que no hay cambio de signo de la derivada. Resulta entonces que h es estrictamente creciente en todo el intervalo y presenta un mínimo relativo (local) y absoluto (global) en -1 y un máximo relativo (local) y absoluto (global) en 1.

3. (a) Sea $f : [a, b] \to R$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   (b) Basta con probar que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$. Como f es continua en $[a, b)$, lo es en $[a, x]$ para todo $x \in (a, b)$. Por la misma razón, f es derivable en (a, x) para todo $x \in [a, b)$. Aplicando Lagrange en cada intervalo $[a, x]$, podemos elegir entonces un real $c(x) \in (a, x)$ tal que $f'(c(x)) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. La elección de los reales $c(x)$ determina una función $c : [a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [a, b) \quad a < c(x) < x$. Tomando límite cuando $x \to a$, tenemos que $a \leq \lim_{x\to a} c(x) \leq \lim_{x\to a} x = a$, de donde $\lim_{x\to a} c(x) = a$. Observamos que la función c no toma el valor a y, por lo tanto, $\lim_{x\to a} f'(c(x)) = L$ (por composición).

   Observación: Es posible modificar ligeramente esta prueba trabajando mediante sucesiones. Se considera una sucesión $t_n \to a^+$ y se aplica Lagrange, definiendo una sucesión $c_n \to a$ tal que $\dfrac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} = f'(c_n)$. Luego la prueba transcurre igual.

   También es posible demostrarlo usando L'Hôpital. Luego de verificar que estamos en las hipótesis del teorema (¡hágalo!), se deriva el numerador y el denominador del cociente incremental, obteniendo $\dfrac{f'(x)}{1}$, cuyo límite cuando $x \to a$ es L por hipótesis. La prueba de L'Hôpital es muy similar a la primera prueba que dimos de esta propiedad, de modo que *in fine*, siempre estamos usando Lagrange.

   (c) La función f es derivable en cualquier intervalo $(0, b)$, puesto que es compuesta y producto de funciones derivables (allí vale la expresión $f(x) = x^3 \sin(1/x)$). Aplicando el algoritmo de derivación, obtenemos que $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - \dfrac{x^3 \cos(1/x)}{x^2} = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)$ en cualquier intervalo $(0, b)$. Por ser sin y cos funciones acotadas, entonces $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Usando la parte anterior, concluimos que f es derivable en 0 y su derivada es $f'(0) = 0$.

   Una observación importante es que esta condición suficiente de derivabilidad, no es necesaria. Si en la definición de f cambian x^3 por x^2, obtienen una función derivable en 0 pero cuya derivada no tiene límite en 0 (verificarlo).