Propuesta de resolución al Examen Parcial de Cálculo I Edición: primer semestre de 2017

UdelaR/FIng/IMERL

6 de mayo de 2017

1. (a) **Definir supremo de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Definir límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales en el caso en que el límite es un número real L.**

El supremo de A es la menor cota superior de A. En lenguaje matemático, s es el supremo de A si y sólo si satisface:

i. $\forall a \in A \quad a \leq s$ (esto es, s es cota superior de A).

ii. $\forall t \in \mathbb{R}\Big((\forall a \in A \quad a \leq t) \Rightarrow s \leq t\Big)$ (esto es, si t es una cota superior de A, entonces $s \leq t$).

Una forma sencilla de expresar (ii) es la contrarrecíproca de (ii):

$$\forall t < s \;\; \exists a \in A \quad t < a \tag{I}$$

Además, $L \in \mathbb{R}$ es el límite de (x_n) si y sólo si, para todo entorno de L, existe un índice p tal que para todo $n \geq p$ x_n pertenece al entorno. Esto se puede expresar en lenguaje matemático con cualquiera de las siguientes fórmulas:

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \quad x_n \in E_{(L,\varepsilon)}$ (expresado en términos de entornos).
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \quad x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (expresado en términos de intervalos).
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \quad |L - x_n| < \varepsilon$ (expresado en términos del valor absoluto).
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \quad \mathrm{d}(x_n, L) < \varepsilon$ (expresado en términos de la distancia).

(b) **Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $s \in \mathbb{R}$. Probar que $s = \sup A$ si y sólo si s es cota superior de A y existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\lim(x_n) = s$.**

Probamos el directo: Supongamos que $s = \sup A$. Por definición de supremo, s es cota superior de A. Para cada natural n consideramos $s - \frac{1}{n+1}$ que es menor que s; siendo s la menor cota superior de A[1]. Entonces $s - \frac{1}{n+1}$ no es cota superior de A, por lo que existe algún elemento de A mayor que $s - \frac{1}{n+1}$ al que llamaremos x_n. La elección de un tal x_n para cada n natural define entonces una sucesión que probaremos que tiene límite s: Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{n+1} \to 0$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq p \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Esto implica que $\forall n \geq p \quad s - \varepsilon < s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s$, de donde, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \quad x_n \in (s-\varepsilon, s) \subseteq E_{(s,\varepsilon)}$.

Ahora probamos el recíproco: Supongamos que s es cota superior de A y que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathbb{A}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to s$. Sabemos entonces que s es cota superior de A y nos resta probar que es la menor cota superior de A. Sea $t < s$ y definamos $\varepsilon = s - t$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to s$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > p \quad x_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$. Esto implica en particular que $t = s - \varepsilon < x_{p+1} \in A$ y aplicando (I) concluimos el resultado.

(c) **Hallar el supremo del conjunto $\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{N}$ y $0 < m < n\}$. Justificar.**

Sea $C := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < m < n\}$. Los racionales $\frac{m}{n} \in C$ están acotados superiormente por 1, ya que $m < n \iff \frac{m}{n} < 1$.

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida según $x_n := 1 - \frac{1}{n+1}$ tiene límite 1. Además, $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, de modo que (x_n) es una sucesión de elementos del conjunto C. Usando la parte anterior, hemos probado que 1 es el supremo del conjunto C.

2. (a) **Definir la función exponencial compleja.**

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define en cada complejo $z = a+bi$ mediante $\exp(z) = \exp(a+bi) = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$. La expresión e^a denota a la exponencial real evaluada en a y las funciones $\sin, \cos$ son las funciones seno y coseno definidas en los reales.

Puesto que la exponencial compleja extiende a la exponencial real, usamos la notación e^z en lugar de $\exp(z)$ sin que haya riesgo de ambigüedad.

[1] La elección de $n+1$ en lugar de n en el denominador es para no dividir entre 0 cuando $n = 0$.

(b) **Hallar las soluciones complejas de la ecuación $|e^z| = 1$. Justificar.**

Sea $z = a + bi$ un complejo. $|e^z| = |e^a||\cos b + i\sin b| = e^a$, ya que el complejo $|\cos b + i\sin b|$ tiene módulo 1. Entonces, $|e^z| = 1 \iff a = 0$. En otros términos, los complejos z tales que $|e^z| = 1$ son los imaginarios puros (de la forma bi con $b \in \mathbb{R}$).

(c) **Hallar todas las raíces complejas del polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ sabiendo que al menos una de sus raíces es solución de $|e^z| = 1$.**

Por hipótesis, nos informan que P admite una raíz de la forma bi para algún $b \in \mathbb{R}$. Evaluando P en bi obtenemos $P(bi) = (bi)^4 - 2(bi)^3 + 6b(bi)^2 - 8bi + 8$. Recordando que $i^2 = -1$, deducimos que $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. Entonces, $P(bi) = b^4 + 2b^3 i - 6b^3 - 8bi + 8 = b^4 - 6b^2 + 8 + 2bi(b^2 - 4)$ y $P(bi) = 0$ si y sólo si b es solución del siguiente sistema: $\begin{cases} 2b(b^2-4) & = & 0 \\ b^4 - 6b^2 + 8 & = & 0 \end{cases}$ La primera ecuación tiene soluciones $0, 2$ y -2. Como 0 no es solución de la segunda, la descartamos. Se verifica directamente que 2 y -2 son soluciones de la segunda, de modo que las raíces imaginarias puras de P son $2i$ y $-2i$.

Como P admite las raíces $2i$ y $-2i$, entonces se puede descomponer como $P(z) = (z-2i)(z+2i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ para ciertos valores de α, β, γ. Para hallarlos observamos que $(z-2i)(z+2i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = (z^2+4)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = \alpha z^4 + \beta z^3 + (4\alpha + \gamma)z^2 + 4\beta z + 4\gamma$. Entonces, igualando coeficiente a coeficiente obtenemos:

$$\begin{cases} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & -2 \\ 4\alpha + \gamma & = & 6 \\ 4\beta & = & -8 \\ 4\gamma & = & 8 \end{cases}$$

De la primera, la segunda y la quinta ecuación, obtenemos $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2$. Para verificar que el sistema admite esta solución, resta verificar que los valores de α, β y γ satisfacen la tercera y la cuarta ecuación, lo cual se verifica directamente[2].

Ahora sólo resta hallar las raíces del polinomio $z^2 - 2z + 2$. Aplicando la conocida fórmula para hallar las raíces de un polinomio de segundo grado obtenemos que las restantes raíces son: $\dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

Las cuatro raíces complejas de P son $\pm 2i, 1 \pm i$.

3. (a) **Enunciar el método de demostración por inducción completa.**

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad acerca de los números naturales. Para probar que todos los naturales satisfacen $\mathcal{P}$ basta probar las siguientes cláusulas:

- 0 satisface $\mathcal{P}$. (base inductiva)
- Para cualquier natural n; si n satisface $\mathcal{P}$, entonces $\mathrm{s}(n)(= n+1)$ satisface $\mathcal{P}$. (paso inductivo)

En lenguaje matemático, podemos enunciarlo así:

$$\Big(\mathcal{P}(0) \land \forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{s}(n)))\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n).$$

(b) **Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar por inducción completa que $\sum_{i=0}^{i=n} x^i = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.**

En este caso, la propiedad $\mathcal{P}(n)$ es $\sum_{i=0}^{i=n} x^i = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Debemos entonces probar $\mathcal{P}(0)$ (base inductiva) y $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ (paso inductivo):

<u>Base inductiva:</u> $\sum_{i=0}^{i=0} x^i = x^0 = 1$. Por otra parte, $\dfrac{x^{0+1}-1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$, lo cual prueba $\mathcal{P}(0)$.

<u>Paso inductivo:</u> Sea n un natural tal que $\mathcal{P}(n)$ se satisface y probemos que $\mathcal{P}(n+1)$ se satisface. $\mathcal{P}(n)$ significa $\sum_{i=0}^{i=n} x^i = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Por otra parte, tenemos que $\sum_{i=0}^{i=n+1} x^i = (\sum_{i=0}^{i=n} x^i) + x^{n+1}$ que (por la hipótesis de inducción $\mathcal{P}(n)$) es:

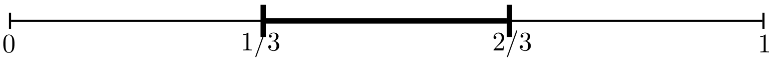
$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+1}(x-1)}{x-1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1} = \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}.$$

Hemos probado entonces que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ para cualquier natural n.

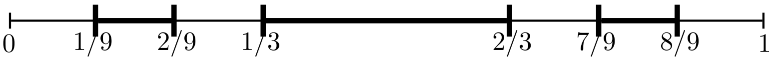
(c) **Se considera el intervalo $[0,1]$. Se define recursivamente la siguiente construcción:**

<u>Paso 0:</u> Se divide el intervalo $[0,1]$ en tres intervalos de igual longitud, separados por los puntos $1/3$ y $2/3$ y se pinta de rojo el intervalo central $[1/3, 2/3]$. Definimos L_0 como la longitud del intervalo $[1/3, 2/3]$.

[2]Sabemos que α, β y γ deben existir, siempre que no hayamos cometido errores de cálculo. Verificar que las otras dos ecuaciones se satisfacen es una buena práctica, aunque en rigor es innecesaria.



<u>Paso 1:</u> Subdividimos en tercios los intervalos no pintados en el paso 0, esto es el $[0, 1/3)$ y el $(2/3, 1]$ y pintamos de rojo los tercios centrales de cada uno de ellos, es decir que pintamos los intervalos $[1/9, 2/9]$ y $[7/9, 8/9]$. Definimos L_1 como la longitud acumulada de los intervalos pintados hasta la etapa 1, esto es: L_0 más la longitud de los intervalos pintados en el paso 1.



<u>Paso $n+1$:</u> Subdividimos cada uno de los intervalos sin pintar hasta el paso n en tres partes iguales y pintamos de rojo el intervalo central de cada uno de ellos. Definimos L_{n+1} como la longitud acumulada de los intervalos pintados hasta la etapa $n+1$.

<u>Se pide:</u> Calcular la longitud L_n del conjunto que se obtiene luego de aplicar n veces este procedimiento. Hallar $\lim L_n$. Concluir que para cualquier intervalo $[a, b] \subseteq [0, 1]$ existe un natural n tal que en el paso n el intervalo $[a, b]$ contiene al menos un punto rojo.

Observamos que en el paso cero, el intervalo central (rojo) mide $1/3$ y determina dos subintervalos sin pintar ($[0, 1/3)$, $(2/3, 1]$).

Eso da lugar a dos subintervalos centrales (rojos) en el paso siguiente ($[1/9, 2/9]$,$[7/9, 8/9]$) que miden $1/3^2$ cada uno; que a su vez determinan cuatro subintervalos sin pintar, que darán lugar a cuatro intervalos centrales de longitud $1/3^3$ en el paso siguiente, etc.

Podemos razonar informalmente pero más precisamente, probando el siguiente enunciado:

$\mathcal{P}(n)$ = *En el paso n se pintan 2^n intervalos, todos ellos de longitud $1/3^{n+1}$ y se determinan 2^{n+1} intervalos sin pintar, todos ellos de longitud $1/3^{n+1}$.*

<u>Base inductiva:</u> Para el paso cero se pinta $2^0 = 1$ intervalo de longitud, $1/3^1 = 1/3$ y se determinan 2^1 intervalos sin pintar, todos ellos de longitud $1/3^1$. Verificamos entonces que la base inductiva se cumple.

<u>Paso inductivo:</u> Supongamos que $\mathcal{P}(n)$ se satisface. Sabemos entonces que en el paso $n+1$ hay 2^{n+1} intervalos sin pintar, todos ellos de longitud $1/3^{n+1}$.

En el paso $n+1$ se divide cada uno de los 2^{n+1} intervalos sin pintar en tercios y se pinta de rojo el tercio central de cada uno de ellos, obteniendo entonces 2^{n+1} intervalos rojos, todos ellos de longitud $1/3^{n+2}$.

Estos nuevos 2^{n+1} intervalos rojos determinan 2^{n+2} intervalos blancos sin pintar, todos ellos de longitud $1/3^{n+2}$.

Esto es, hemos probado $\mathcal{P}(n+1)$ a partir de $\mathcal{P}(n)$.

Usando la propiedad que probamos, tenemos que en el paso n se agregan 2^n intervalos de longitud $1/3^{n+1}$, incrementando la longitud del conjunto pintado de rojo en $2^n/3^{n+1}$. La longitud acumulada luego de aplicar n veces el procedimiento es $L_n = \sum_{i=0}^{i=n} 2^i/3^{i+1}$.

Para hallar $\lim L_n$ observamos que $L_n = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{i=n}(2/3)^i$ que por la parte anterior es $\dfrac{1}{3}\dfrac{(2/3)^{n+1}-1}{(2/3)-1} = 1-(2/3)^{n+1}$. Como $0 < 2/3 < 1$, entonces $((2/3)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, de donde $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$.

El intervalo $[a, b]$ tiene longitud $\varepsilon = b-a > 0$. Supongamos por el abusrdo que $[a, b]$ estuviera hecho de puntos sin pintar. Entonces la longitud L_n debería ser menor a $1-\varepsilon < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > p \quad 1-\varepsilon < L_n \leq 1$, lo cual es absurdo.