Nociones de Topología en $\mathbb{R}$

Juan Piccini

26 de abril de 2017

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío, $x \in \mathbb{R}$. Dado $\delta > 0$, llamaremos ***Entorno de centro*** x ***y radio*** δ al conjunto $E(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$. Esto es, $E(x, \delta)$ es el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$. El **Entorno reducido** $E^*(x, \delta)$ es el conjunto $\{y \in \mathbb{R} : 0 < |x - y| < \delta\}$. Esto es, $E^*(x, \delta)$ es el entorno $E(x, \delta)$ pero sin su centro x.

Definición 1 *Punto interior, punto exterior, punto frontera*

- Diremos que x ***es un punto interior a*** A sii existe un entorno de x contenido en A. Esto es, si existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$.
- Diremos que x ***es un punto exterior a*** A sii existe un entorno de x contenido en A^c. Esto es, si existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A^c$.
- Diremos que x ***es un punto frontera de*** A sii x no es ni interior ni exterior. Esto es, si para todo $\delta > 0$ se tiene $(x - \delta, x + \delta) \bigcap A \neq \emptyset$ y $(x - \delta, x + \delta) \bigcap A^c \neq \emptyset$.

Observaciones

- Todo número real satisface una y sólo una de las tres definiciones. Esto es, fijado el conjunto A, todo real es interior a A o bien es frontera de A o bien es exterior a A.
- Un real x es exterior a A si y sólo si es interior al complemento de A.
- Si x es un punto interior de A, entonces $x \in A$. Análogamente, si x es exterior tendremos que $x \in A^c$.

Definición 2 *Interior, Exterior y Frontera de un conjunto*

- Al conjunto de los puntos interiores de A lo llamamos ***interior de*** A y lo denotamos $\mathring{A}$ o $\text{int}(A)$.
- Al conjunto de los puntos exteriores a A lo llamamos ***exterior de*** A y lo denotamos $\text{ext}(A)$.
- Al conjunto de los puntos frontera de A lo llamamos ***frontera de*** A o ***borde de*** A y lo denotamos $\partial(A)$.

Observación De la observación anterior, se deduce que $\mathbb{R} = \mathring{A} \cup \partial A \cup \text{ext}(A)$ y esta unión es *disjunta*[1]. También de la observación anterior se deduce que $\text{ext}(A) = (A^c)^\circ$, $\mathring{A} \subseteq A$ y $ext(A) \subseteq A^c$.

Definición 3 *Conjunto Abierto*
Diremos que A es ***abierto*** cuando todos los puntos de A son interiores a A.

Observación Las siguientes son afirmaciones equivalentes:

- A es abierto.
- $\mathring{A} = A$.
- $\forall x \in A \quad \exists \delta > 0 \quad E(x, \delta) \subseteq A$.

Por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos, ya que $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ y $\mathring{\emptyset} = \emptyset$.

Teorema 1 *Los intervalos abiertos son conjuntos abiertos*
Dem.
Sea un intervalo abierto (a, b). Basta con probar que todo $x \in (a, b)$ es interior a (a, b).
Fijemos $x \in (a, b)$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \text{mín}\{x - a, b - x\}$. Como δ es menor que la distancia de x al borde más cercano del intervalo (a, b), entonces $E(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$. Concluimos entonces que x es interior a A, como queríamos demostrar.

Observación De modo análogo se prueba que toda semirrecta $(-\infty, a)$ es abierta y toda semirrecta $(b, +\infty)$ es abierta.

[1] es decir, los uniendos son dos a dos disjuntos

Teorema 2 *La unión de abiertos es un conjunto abierto*
Dem.

Sea $\mathcal{A}$ una familia[2] de conjuntos abiertos. Sea $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, esto es $X = \{a \mid \exists A \in \mathcal{A} \quad a \in A\}$. Debemos probar entonces que X es abierto, es decir que:

$$\forall x \in X \quad \exists \delta > 0 \quad E(x, \delta) \subseteq X$$

Fijemos $x \in X$. Como X es la unión de los abiertos de la familia $\mathcal{A}$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Como A es abierto, entonces existe $\delta > 0$ tal que $E(x, \delta) \subseteq A$. Como $A \subseteq X$ (por ser A uno de los conjuntos de la unión), entonces $E(x, \delta) \subseteq X$, lo cual termina la demostración.

Teorema 3 *La intersección de una cantidad finita de abiertos es un conjunto abierto*
Dem.

Primero observemos que basta con probar que la intersección de dos abiertos en un abierto. Por ejemplo, la operación de intersectar 3 abiertos A_1, A_2, A_3 se puede hacer en dos etapas como $(A_1 \cap A_2) \cap A_3$. Aplicando que la intersección de dos abiertos es un abierto, primero concluimos que $A_1 \cap A_2$ es abierto y luego que la intersección de éste con A_3 también es abierto. Ejercicio: formalizar este razonamiento por inducción completa.

Sean ahora dos abiertos A_1, A_2. Tenemos que probar que $A_1 \cap A_2$ es abierto, es decir que $\forall x \in A_1 \cap A_2$ $\exists \delta > 0 \quad E(x, \delta) \subseteq A_1 \cap A_2$.

Fijemos $x \in A_1 \cap A_2$. Como A_1 es abierto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $E(x, \delta) \subseteq A_1$. Como A_2 es abierto, existe $\delta_2 > 0$ tal que $E(x, \delta_2) \subseteq A_2$. Uno de los dos radios δ_1, δ_2 es el mínimo de los dos. Llamemos δ a este mínimo. Entonces $E(x, \delta) \subseteq A_1$ y $E(x, \delta_2) \subseteq A_2$, lo cual implica que $E(x, \delta) \subseteq A_1 \cap A_2$ como queríamos demostrar.

Teorema 4 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Entonces:

1. $\mathring{A}$ es abierto y $\mathring{A} \subseteq A$.
2. Para todo $B \subseteq A$, si B es abierto entonces $B \subseteq \mathring{A}$.

Dem.

1. Probamos que $\mathring{A}$ es abierto. Para eso, basta con probar que $\mathring{A} \subseteq (\mathring{A})^\circ$.

   Sea $x \in \mathring{A}$. Por definición de interior, existe $\delta > 0$ tal que $E(x, \delta) \subseteq A$. Entonces, para todo $y \in E(x, \delta)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(y, \varepsilon) \subseteq E(x, \delta) \subseteq A$. Esto prueba que todos los puntos $y \in E(x, \delta)$ son interiores a A. En otros términos, que $E(x, \delta) \subseteq \mathring{A}$; de lo cual se deduce que $x \in (\mathring{A})^\circ$.

   Probamos entonces que todo $x \in \mathring{A}$ pertenece a $(\mathring{A})^\circ$, de donde $\mathring{A} \subseteq (\mathring{A})^\circ$ como queríamos probar.

2. Sea $B \subseteq A$ tal que B es abierto. Sea $x \in B$. Como B es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $E(x, \delta) \subseteq B \subseteq A$, de donde $x \in \mathring{A}$. Concluimos entonces que $B \subseteq \mathring{A}$.

En otros términos, el Teorema 4 establece que el interior de A es el *mayor abierto incluído en* A.

Definición 4 *Conjunto cerrado*
A es ***cerrado*** sii A^c es abierto.

Por ejemplo los intervalos cerrados son conjuntos cerrados: En efecto, $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto por ser unión de abiertos.

También $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son cerrados por ser $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ (abiertos) sus respectivos complementos.

Recordemos las llamadas ***leyes de De Morgan***, las cuales nos serán de utilidad: Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c$ (el complemento de la unión es la intersección de los complementos).
- $\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c$ (el complemento de la intersección es la unión de los complementos).

Teorema 5 *La intersección de cerrados es cerrado*
Dem.

Sea $\mathcal{C}$ una familia de cerrados. Tenemos que probar que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es un cerrado, es decir que $(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)^c$ es un abierto. Aplicando De Morgan, esto equivale a probar que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C^c$ es un abierto. Como cada $C \in \mathcal{C}$ es cerrado, por definición, cada C^c es un abierto. Entonces $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C^c$ es un abierto por ser unión de abiertos, lo cual termina la prueba.

Teorema 6 *La unión de una cantidad finita de cerrados es cerrado*
Dem.

Nuevamente se prueba sin mayores problemas a partir del teorema 3 y la aplicación de De Morgan.

[2] Es usual que a los conjuntos de conjuntos de reales se les llame *familias de conjuntos*. Esto no es más que una jerga que ayuda al lector a saber que los elementos de la familia no son reales, sino conjuntos de reales. También se estila referirse a los conjuntos de funciones como *familias de funciones*.

Definición 5 *Punto clausura, punto de acumulación, punto aislado*

Diremos que x ***es punto clausura de*** A sii para todo $\delta > 0$ se tiene que $E(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Esto es: para todo entorno de centro en x siempre hay al menos un punto de A. Le llamamos *clausura de* A al conjunto

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es clausura de } A\}$$

Diremos que x ***es punto de acumulación de*** A sii para todo $\delta > 0$ se tiene $E^*(x,\delta) \bigcap A \neq \emptyset$. Esto es: para todo entorno de centro en x siempre hay al menos un punto de A diferente de x. Denotamos como A' al conjunto

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$$

Al conjunto A' a veces se le dice *conjunto derivado de* A.

Diremos que x ***es punto aislado de*** A cuando $x \in A$ pero x no es punto de acumulación de A. Esto es: $x \in A$ y existe $\delta > 0$ tal que $E^*(x,\delta) \bigcap A = \emptyset$.

Observaciones

- La definición de punto clausura es equivalente a la negación de la definición de punto exterior. En efecto, un punto x que no es exterior a A cumple que para todo $\delta > 0$, $E(x,\delta) \not\subseteq A^c$. En otros términos, x no es exterior a A si y sólo si para todo $\delta > 0$ $E(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Concluimos que $\overline{A} = (\text{ext}(A))^c$.
- Por las definiciones es claro que $A' \subseteq \overline{A}$ y que $A \subseteq \overline{A}$.
- Si $x \notin A'$, entonces para algún $\delta > 0$ se tiene que $E^*(x,\delta) \cap A = \emptyset$.

  Si además $x \in \overline{A}$, entonces $E(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$, de modo que debe ser $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$, entonces $x \in \overline{A}$.

  Concluimos entonces que $\overline{A} = A' \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto aislado de } A\}$ y que esta unión es disjunta.
- Para todo real x, $x \notin \overline{A}$ sii $E(x,\delta) \cap A = \emptyset$ para algún $\delta > 0$. Esto implica que $(\overline{A})^c = \text{ext}(A)$, lo que equivale a $\overline{A} = (\text{ext}(A))^c$. Como vimos, $\mathbb{R} = \mathring{A} \cup \partial A \cup \text{ext}(A)$ y esta unión es disjunta; de modo que $\mathring{A} \cup \partial A = (\text{ext}(A))^c$ y concluimos que $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

Observación

Del resultado anterior se desprende que A es cerrado sii contiene a sus puntos de acumulación.

Teorema 7 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Entonces*

1. *$\overline{A} \supseteq A$ y $\overline{A}$ es cerrado.*
2. *Para todo $B \supseteq A$, si B es cerrado entonces $B \supseteq \overline{A}$.*

Dem.

El enunciado es el análogo al Teorema 4, pero enunciado para cerrados. La prueba se basa en usar 'ese teorema, pasando a los complementos.

1. *Como observamos, $\overline{A} = (\text{ext}(A))^c = ((A^c)^\circ)^c$. Por el item 1. del Teorema 4, $(A^c)^\circ$ es abierto, de donde $\overline{A}$ es cerrado. Además $(A^c)^\circ \subseteq A^c$, de donde, tomando complementos, $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c \supseteq (A^c)^c = A$[3].*
2. *Si B cerrado y $B \supseteq A$, entonces B^c es abierto y $B^c \subseteq A^c$. Por el item 2. del Teorema 4, tenemos $B^c \subseteq (A^c)^\circ$. Tomando nuevamente complementos, $B \supseteq ((A^c)^\circ)^c = \overline{A}$.*

En otros términos, el Teorema 7 establece que la clausura de A es el menor cerrado que contiene a A.

Observar que los resultados que probamos acerca de los cerrados se obitenen tomando complementos y aplicando un resultado análogo para abiertos.

Definición 6 *Cubrimientos, Subcubrimientos y Conjuntos Compactos*

1. Un ***cubrimiento*** de A es una familia $\mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Esto es, una familia de conjuntos cuya unión contiene al conjunto A.
2. Dado un cubrimiento $\mathcal{C}$ de A, un ***subcubrimiento*** del cubrimiento $\mathcal{C}$ es una subfamilia de $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ que también es un cubrimiento de A.
3. Cuando todos los conjuntos $C \in \mathcal{C}$ son *abiertos*, diremos que $\mathcal{C}$ es un ***cubrimiento abierto*** de A.
4. Diremos que A ***es compacto*** sii todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento finito.

Observaciones

- $\mathbb{R}$ no es compacto, dado que si tomamos el cubrimiento $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n,n)$ de $\mathbb{R}$, ese cubrimiento no admite ningún subcubrimiento finito.

[3] Observar que si $X \subseteq Y$, entonces $X^c \supseteq Y^c$

- Un intervalo (a,b) no es un compacto, ya que el cubrimiento $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n})$ no admite un subcubrimiento finito.

Teorema 8 *Los intervalos $[a,b]$ son conjuntos compactos*
Dem.

Tomemos un intervalo cerrado $[a,b]$ cualquiera. Para probar que $[a,b]$ es compacto tenemos que demostrar que si $\mathcal{C}$ es un cubrimiento por abiertos de $[a,b]$, entonces podemos cubrir a $[a,b]$ usando una cantidad finita de tales abiertos.

Sea $S = \{x \in [a,b] : [a,x]$ puede cubrirse con una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{C}\}$. Veremos que S tiene supremo:

- $S \neq \emptyset$ porque $a \in S$, dado que $[a,a] = \{a\}$ y como $\mathcal{C}$ cubre a A, entonces a pertenece a alguno de los abiertos de $\mathcal{C}$. Dicho abierto es el subcubrimiento finito de $[a,a]$.

- S está acotado superiormente porque por definición $S \subseteq [a,b]$.

Por completitud, existe $s = \sup S$ y como $S \subseteq [a,b]$, se tiene que $a \leq s \leq b$.

Veremos que

- $s \in S$: Como $s \in [a,b]$ y $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de $[a,b]$, existe un miembro de $\mathcal{C}$ (llamémosle C) tal que $s \in C$. Como C es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s+\delta) \subseteq C$. Como $s = \sup S$, entonces existe $x \in S$ tal que $s - \delta < x \leq s$. Se tiene que $[a,s] = [a,x] \bigcup [x,s]$.

  Como $x \in S$, podemos cubrir $[a,x]$ con una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{C}$. Llamémosle $C_1, C_2, \ldots, C_k$ a esos abiertos. Por otro lado $[x,s] \subseteq E(s,\delta) \subseteq C$, de modo que C cubre a $[x,s]$.

  Entonces $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$ (subfamilia finita de $\mathcal{C}$) cubre a $[a,s]$, lo que implica que $s \in S$.

- $s = b$: Sabemos que $s \leq b$. Supongamos que fuera $s < b$. Consideremos además los abiertos $C_1, \ldots, C_k, C$ del ítem anterior.

  Como $s \in C$ (abierto), existe $\delta > 0$ tal que $E(x,\delta) \subseteq C$. Eligiendo δ suficientemente chico, $s < s + \delta \leq b$.

  Eligiendo x tal que $s < x < s+\delta$, tenemos que $[a,x] = [a,s] \bigcup [s,x]$. Entonces $C_1, \ldots, C_k, C$ es un cubrimiento de $[a,x]$, de modo que $x \in S$. Esto es absurdo, ya que $\sup S = s < x$.

  Concluimos entonces que $s = b$, lo que implica $b \in S$ y por tanto $[a,b]$ admite un subcubrimiento finito del cubrimiento $\mathcal{C}$.

Un intervalo $[a,b]$ es un conjunto cerrado y acotado. El siguiente teorema generaliza el resultado anterior, probando que todo cerrado y acotado es un compacto. Más aún, el recíproco también es cierto, por lo cual los compactos de $\mathbb{R}$ son exactamente los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$.

Teorema 9 *Teorema de Borel-Lebesgue*
En $\mathbb{R}$ un conjunto A es compacto sii es cerrado y acotado.

La prueba de este teorema se basa en el anterior. Conceptualmente aporta pocos elementos nuevos a la comprensión del tema.

Para una lectura ampliatoria sobre la topología de los reales, se les recomienda:

Curso de Análise, vol 1. Elon Lages Lima. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq. 1992.

General Topology. John Kelley. Graduate Texts in Mathematics. Springer (1975).

Ambos libros están en la biblioteca del IMERL.