Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i.b^{n-i}.f(n,i)$$

$f(n,i)$ se definió en el práctico. $f(n,i)$ representa el Triángulo de Pascal

Se prueba por INDUCCIÓN COMPLETA

Paso Base: $n = 0$, ¿La expresión será válida evaluada en $n = 0$?

$$(a+b)^0 \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{0} a^i.b^{0-i}.f(0,i)$$

- $(a+b)^0 = 1$
- $\sum_{i=0}^{0} a^i.b^{0-i}.f(0,i) = \underbrace{a^0}_{=1}.\underbrace{b^{0-0}}_{=1}.\underbrace{f(0,0)}_{=1\ (Def.)} = 1$

$\Rightarrow$ Se cumple el Paso Base para $n = 0$

Paso Inductivo:

- Hipótesis: Vale para un n genérico

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i.b^{n-i}.f(n,i)$$

- Tésis: Vale para el natural siguiente, $n+1$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a^i.b^{(n+1)-i}.f(n+1,i)$$

Demostración:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n.(a+b) \stackrel{H}{=} \left[\sum_{i=0}^{n} a^i.b^{n-i}.f(n,i)\right].(a+b) \underbrace{=}_{Distributiva}$$

$$a.\left[\sum_{i=0}^{n} a^i.b^{n-i}.f(n,i)\right] + b.\left[\sum_{i=0}^{n} a^i.b^{n-i}.f(n,i)\right] \underbrace{=}_{Propiedad\ Sumatoria}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a.a^i.b^{n-i}.f(n,i) + \sum_{i=0}^{n} b.a^i.b^{n-i}.f(n,i) =$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a^{i+1}.b^{n-i}.f(n,i)}_{(I)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a^i.b^{(n+1)-i}.f(n,i)}_{(II)} \overset{(*)}{=}$$

$(*)$ <u>Desarrollo de (I) y (II)</u>

$$(I)\ \sum_{i=0}^{n} a^{i+1}.b^{n-i}.f(n,i) \underbrace{=}_{C.V.:\ j=i+1} \sum_{j=1}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1)$$

$$(II)\ \sum_{i=0}^{n} a^i.b^{(n+1)-i}.f(n,i) \underbrace{=}_{C.V.:\ j=i} \sum_{j=0}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j)$$

Sigo la Demostración:

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1)}_{(III)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j)}_{(IV)} \overset{(**)}{=}$$

$(**)$ <u>Desarrollo de (III) y (IV)</u>

$$(III)\ \sum_{j=1}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1) = \sum_{j=1}^{n} \left[a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1)\right] + a^{n+1}.\underbrace{b^{(n+1)-(n+1)}}_{=b^0=1}.\underbrace{f(n,(n+1)-1))}_{=f(n,n)=1\ (Def.)}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{j=1}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1) = \sum_{j=1}^{n} \left[a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1)\right] + a^{n+1}$$

$$(IV)\ \sum_{j=0}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j) = \sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j) + \underbrace{a^0}_{=1}.\underbrace{b^{(n+1)-0}}_{=b^{n+1}}.\underbrace{f(n,0)}_{=1\ (Def.)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j) = \sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j) + b^{n+1}$$

Sigo la Demostración:

$$\overset{(**)}{=}\left[\sum_{j=1}^{n}\left[a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1)\right] + a^{n+1}\right] + \left[\sum_{j=1}^{n}\left[a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j)\right] + b^{n+1}\right] =$$

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left[a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j-1) + a^j.b^{(n+1)-j}.f(n,j)\right] \underbrace{=}_{Factorizar}$$

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left[a^j.b^{(n+1)-j}.\underbrace{[f(n,j-1) + f(n,j)]}_{=f(n+1,j)\ (Def.)}\right] =$$

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j)$$

Resumiendo:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j) \overset{?}{=} \sum_{j=0}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j)$$

Si se diera la ÚLTIMA IGUALDAD, el ejercicio estaría listo!! (se cumpliría mi Tésis)

Obreservemos que:

$$\sum_{j=0}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j) + \underbrace{a^0}_{=1}.\underbrace{b^{(n+1)-0}}_{b^{n+1}}.\underbrace{f(n+1,0)}_{=1\ (Def.)} + a^{n+1}.\underbrace{b^{(n+1)-(n+1)}}_{=1}.\underbrace{f(n+1,n+1)}_{=1\ (Def.)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n+1} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a^j.b^{(n+1)-j}.f(n+1,j) = (a+b)^{n+1}$$