Cálculo I

Diciembre de 2016

Solución del examen

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

Ejercicio 1 Sean f y g funciones reales continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b), y tales que $f(a) \neq f(b)$ y $g(a) \neq g(b)$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{g'(c)}{g(b)-g(a)}$.

Solución: Verdadero Véase el teorema de Cauchy en el curso.

Ejercicio 2 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente tal que $a_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún límite finito.

Solución: Verdadero Como $a_n \leq 0$, la sucesión monótona creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 0, luego tiene límite finito $L \leq 0$.

Ejercicio 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces la función f presenta un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = x_0$.

Solución: Falso Contraejemplo: la función $f(x) = x^3$ cumple $f'(0) = 0$, pero no tiene extremo relativo en 0.

Ejercicio 4 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Solución: Falso Contraejemplo: la función $f(x) = x^2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, pero no es uniformemente continua.

Ejercicio 5 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua y $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \mu$.

Solución: Falso Contraejemplo: la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ +1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

es seccionalmente continua en $[0,1]$, y tiene valor medio $\mu = 0$, aunque no exista ningún punto $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = 0$. (La propiedad del valor medio sólo se cumple cuando la función f es continua.)

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 40 puntos)

Ejercicio 1 Sea A el conjunto de números complejos definido por $A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0\}$.

Solución Antes de comenzar, se observa que la ecuación $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ *no es* una ecuación polinomial en $\mathbb{C}$, en razón de la presencia del conjugado $\bar{z}$. Así, no se puede resolverla directamente en $\mathbb{C}$, y se necesita descomponer el número $z \in \mathbb{C}$ en sus partes real e imaginaria.

Escribiendo $z = a + ib$ (con $a, b \in \mathbb{R}$), tenemos que:

$$\begin{aligned} z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (a+ib)^2 - 2(a-ib) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2 - 2a + 1) + (2ab + 2b)i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \ \text{ y } \ 2ab + 2b = 2b(a+1) = 0 \end{aligned}$$

Así se trata de resolver (en $\mathbb{R}$) el sistema: $\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \\ 2b(a+1) = 0 \end{cases}$

Como $2b(a+1) = 0$ (segunda ecuación) si y sólo si $b = 0$ o $a = -1$, se distinguen dos casos:

- Caso donde $b = 0$. En este caso, la primera ecuación nos da:

$$a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

  Así se deduce que $a = 1$, lo que nos da la solución $(1, 0) \in A$.

- Caso donde $a = -1$. En este caso, la primera ecuación nos da:

$$a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - b^2 + 2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm 2$$

  Así se deduce que $b = 2$ o $b = -2$, lo que nos da las soluciones $(-1, 2), (-1, -2) \in A$.

Al final, tenemos que $A = \{(1,0), (-1,2), (-1,-2)\}$ y la única opción que se aplica es:
$\boxed{\#A = 3 \text{ y } (1,0) \in A}$

Ejercicio 2 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a algún límite $L \in \mathbb{R}$. Se define el recorrido de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto A cumple que:

Solución: Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, está acotada inferiormente y superiormente. Así, su recorrido $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado, y tenemos que $\inf(A) \leq L \leq \sup(A)$, con $L = \lim a_n$. En general, no se puede decir nada más sobre A, y la única opción que se aplica es: $\boxed{\text{El conjunto } A \text{ está acotado y se cumple que } L \leq \sup(A) \text{ y } L \geq \inf(A)}$

Ejercicio 3 Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x (e^t - 1)\, dt$.

Solución: Tenemos que: $F(x) \ = \ \displaystyle\int_0^x (e^t - 1)\, dt \ = \ \left[e^t - t\right]_{t=0}^{t=x} \ = \ e^x - x - 1.$

Como $e^t > 1$ para todo $t > 0$, se deduce que $F(0) = 0$ y $F(x) > 0$ para todo $x > 0$. Así, la función $F(x)$ sólo toma valores positivos, salvo en el punto 0 donde $F(x) = 0$. Estudiamos las dos integrales (impropias) propuestas.

- Para todo $a \geq 0$, tenemos que

$$\int_0^a F(x)\, dx \ = \ \left[e^x - \tfrac{1}{2}x^2 - x\right]_{x=0}^{x=a} \ = \ e^a - \tfrac{1}{2}a^2 - a - 1 \ \to \ +\infty \qquad \text{cuando } a \to +\infty$$

  lo que implica que la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ (primera especie) diverge.

- Para estudiar la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\,dx$ (segunda especie), se desarrolla la función F al orden 2 en el punto $x=0$. Tenemos que:

$$F(x) \;=\; \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)-x-1 \;=\; \frac{1}{2}x^2+o(x^3) \qquad \text{cuando } x\to 0$$

Así tenemos que $F(x)\sim\frac{1}{2}x^2$ (cuando $x\to 0^+$), de tal modo que $\frac{1}{F(x)}\sim\frac{2}{x^2}$. Como se sabe que la integral impropia de segunda especie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge para todo $\alpha\geq 1$, se deduce (por equivalencia en el caso $\alpha=2$) que la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\,dx$ diverge.

Entonces, la única opción que se aplica es:

$$\boxed{\text{Las integrales } \int_0^1 \frac{1}{F(x)}\,dx \ \text{ y } \ \int_0^{+\infty} F(x)\,dx \ \text{ divergen.}}$$

Ejercicio 4 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} |\operatorname{sen}(x)|+1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ e^{x-1}+c & \text{si } x>1\end{cases}$

Los valores a, b y c que hacen que f sea continua y derivable en 0, y continua en 1 son...

Solución: Sean $f_1,f_2,f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f_1(x)=|\operatorname{sen}(x)|+1$ (primer trozo), $f_2(x)=ax+b$ (segundo trozo) y $f_3(x)=e^{x-1}+c$ (tercer trozo).

- *Continuidad en el punto $x=0$.* Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f_1(x)=1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f_2(x)=b$$

Así, para que la función f sea continua en $x=0$, se necesita que $b=1$.

- *Derivabilidad en el punto $x=0$.* Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-\operatorname{sen}(x)+1)-1}{x} = -1\\
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = f_2'(0) = a
\end{aligned}$$

(observando que $|\operatorname{sen}(x)|=-\operatorname{sen}(x)$ cuando $x\in[-\pi,0]$) Así, para que la función f sea derivable en $x=0$, se necesita que $a=-1$.

- *Continuidad en el punto $x=1$.* Tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \;=\; \lim_{x\to 1^-} f_2(x) \;=\; a+b \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f_3(x)=1+c$$

Así, para que la función f sea continua en $x=1$, se necesita que $c=-1$.

Al final, la única opción que se aplica es: $\boxed{(a,b,c)=(-1,1,-1)}$

Ejercicio 5 La integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(x)\,dx$ vale...

Solución: Sea $I = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x)\, dx$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} I \;=\; \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx \;&=\; \big[e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)\, dx \\ &=\; e^{\pi} - 2\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{f} \underbrace{\mathrm{sen}(x)}_{g'}\, dx \\ &=\; e^{\pi} - 2\left(\big[e^{2x}(-\cos(x))\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}(-\cos(x))\, dx\right) \\ &=\; e^{\pi} - 2\big[e^{2x}(-\cos(x))\big]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos(x)\, dx \\ &=\; e^{\pi} - 2 - 4I \end{aligned}$$

Así se deduce que $5I = e^{\pi} - 2$, de tal modo que la integral I vale $\boxed{\dfrac{e^{\pi} - 2}{5}}$

Primer ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

En este ejercicio, sólo se consideran series reales.

1. Definir las nociones de serie convergente y de serie absolutamente convergente.

2. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Solución: véase las notas del curso.

3. Dar un ejemplo de serie convergente que no sea absolutamente convergente. Explicitar los criterios de convergencia/divergencia usados para justificar dicho ejemplo.

Solución: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, pero no es absolutamente convergente. (Para la justificación de la convergencia, véase el curso.)

4. Ahora, se supone que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son dos series absolutamente convergentes, y se define $c_n = a_n b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutamente convergente? En caso afirmativo, demostrarlo; en caso negativo, dar un contraejemplo (justificándolo).

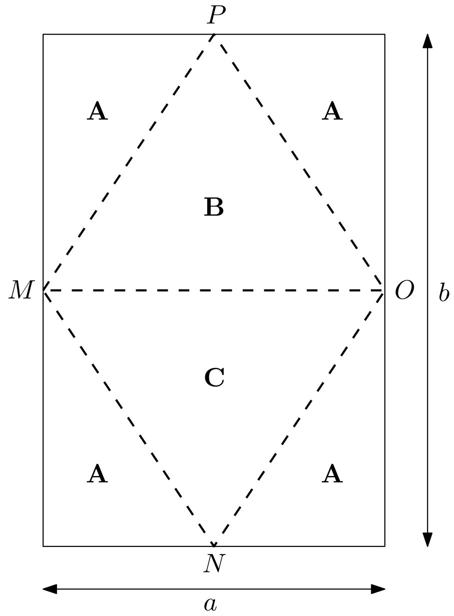
Solución: Por hipótesis, las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes. En particular, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente (por **2.**), lo que implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Así, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada (como toda sucesión convergente), y existe $M > 0$ (finito) tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, se observa que $|c_n| = |a_n||b_n| \leq M|b_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \;\leq\; M \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \;<\; +\infty\,.$$

Luego, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.

Segundo ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

Se desea excavar un estanque rectangular en el cual se criarán 3 variedades de peces **A**, **B** y **C**, con fines alimentarios. El estanque será dividido en 6 regiones como indica la figura: las cuatro regiones triangulares externas para la especie **A**, la región triangular interna superior para la especie **B**, y la región triangular interna inferior para la especie **C**:



(En la figura, se supone que M, N, O y P son puntos medios de los respectivos lados.)

La separación entre las 6 regiones se efectúa mediante tabiques indicados por líneas discontinuas en la figura.

1. Expresar la suma L de las longitudes de los tabiques en función de a y b.

Solución: La longitud de cada uno de los cuatro trozos diagonales del tabique es $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ (por el teorema de Pitágoras), y la longitud del trozo horizontal es a. Así tenemos que:

$$L \;=\; 4 \times \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} + a \;=\; 2\sqrt{a^2+b^2} + a\,.$$

2. Ahora, se supone que L mide 100 metros. Expresar b^2 en función de a.
¿Cuál es el máximo valor posible para a?

Solución: Tenemos que $L \;=\; 2\sqrt{a^2+b^2} + a \;=\; 100$,

entonces $\sqrt{a^2+b^2} \;=\; \dfrac{100-a}{2}$

entonces $a^2+b^2 \;=\; \left(\dfrac{100-a}{2}\right)^2$

entonces $b^2 \;=\; \left(\dfrac{100-a}{2}\right)^2 - a^2 \;=\; \dfrac{1}{4}(100+a)(100-3a)$

Se observa que la expresión anterior para b^2 es positiva si y sólo si $3a < 100$, de tal modo que el máximo valor de a es $100/3$. (El caso límite $a = 100/3$ corresponde a la situación degenerada donde $b = 0$, el tabique siendo formado por 3 trozos horizontales superpuestos.)

El rendimiento de cada especie es proporcional a la superficie del estanque, ya que tiene profundidad constante. Se sabe que el rendimiento por metro cuadrado de la especie **B** es $3/4$ del rendimiento de la especie **A** y que el de la especie **C** es $2/3$ del de la especie **B**.

3. Expresar el rendimiento $r = r(a)$ del estanque en función de a y de s, donde s es el rendimiento de la especie **A** por metro cuadrado.

Solución: La superficie ocupada por la especie **A** es $ab/2$ (mitad del rectangulo), mientras cada una de las especies **B** y **C** ocupa una superficie $ab/4$. Así:

- El rendimiento de la especie **A** es $\frac{1}{2}abs$
- El rendimiento de la especie **B** es $\frac{ab}{4} \times \frac{3}{4}s = \frac{3}{16}abs$
- El rendimiento de la especie **C** es $\frac{ab}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}s = \frac{1}{8}abs$

De tal modo que:

$$\begin{aligned} r(a) &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{8}\right) abs \;=\; \tfrac{13}{16}abs \\ &= K\,a\sqrt{(100+a)(100-3a)} \qquad \text{con } K = \tfrac{13}{16}s \end{aligned}$$

4. Demostrar que si r es una función positiva de la variable a, entonces r presenta un máximo en un punto a_0 si y sólo si la función r^2 presenta un máximo en el punto a_0.

Solución: Escribiendo D el dominio de definición de la función r (con $a_0 \in D$), tenemos que:

$$\begin{aligned} & \text{la función } r \text{ tiene máximo en el punto } a_0 \\ \Leftrightarrow\; & \forall a \in D,\ r(a) \le r(a_0) \\ \Leftrightarrow\; & \forall a \in D,\ r^2(a) \le r^2(a_0) \qquad\qquad (\text{pues } r(a) \ge 0) \\ \Leftrightarrow\; & \text{la función } r^2 \text{ tiene máximo en el punto } a_0 \end{aligned}$$

Se observa que en el caso que nos interesa, el dominio de definición de la función de rendimiento es dado por $D = [0, 100/3]$ (o $D = (0, 100/3)$ si se rechazan los dos casos degenerados donde una de las dos dimensiones a y b es nula).

5. Calcular el valor de a que maximiza la función r^2. Deducir los valores de a y de b que maximizan el rendimiento del estanque.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} r^2(a) &= K^2a^2(100+a)(100-3a) \;=\; K^2\left(-3a^4 - 200a^3 + 10000a^2\right) \\ (r^2)'(a) &= K^2\left(-12a^3 - 600a^2 + 20000a\right) \;=\; K^2a(-12a^2 - 600a + 20000) \end{aligned}$$

Así tenemos que $(r^2)'(a) = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $-12a^2 - 600a + 20000 = 0$. Calculando las raíces del polinomio $-12a^2 - 600a + 20000$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta &= (-600)^2 - 4(-12)(20000) = 1320000 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{1320000} \;=\; 200\sqrt{33} \\ a_1 &= (600 + 200\sqrt{33})/(-24) \;=\; -25 - \tfrac{25}{3}\sqrt{33} \;\approx\; -72,87 \;<\; 0 \\ a_2 &= (600 - 200\sqrt{33})/24 \;=\; -25 + \tfrac{25}{3}\sqrt{33} \;\approx\; 22,87 \;\in\; D \end{aligned}$$

Así, el estudio del signo de $(r^2)'$ muestra que la función r^2 es creciente en $[0, a_2]$, decreciente en $[a_2, 100/3]$, y que alcanza su máximo para $a = a_2$. Luego, la función de rendimiento $r(a)$ alcanza su máximo en $\boxed{a = a_2 = -25 + \frac{25}{3}\sqrt{33} \;\approx\; 22,87}$. Se deduce fácilmente el valor de b correspondiente por **2.**