Práctico 10 - Integrales impropias y Series

1. Integrales impropias

1. Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t)\geq 0$ y definimos $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Demostrar que $F(x)$ es creciente, y que

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge} \iff F(x) \text{ esta acotada superiormente}$$

2. Sean f y g funciones continuas y tales que $0\leq f(t)\leq g(t)$. Demostrar que

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge} \implies \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ diverge}$$

3. Clasificar:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)^2\,dt\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2-\frac{1}{x^2}}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,dx$ (m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{\alpha}(x)\cos^{\beta}(x)}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

4. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha}(x)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

5. Probar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx$ converge y calcularla.

6. (a) Probar que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ convergen y relacionarlas.

(b) Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$.

7. Hallar el valor de k, real, para que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$ sea convergente y calcularla.

8. (a) Calcular $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t^2+1}$ (Sugerencia: Dividir entre el polinomio t^2+t+1).

   (b) Calcular $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x} dx$ (Sugerencia: Hacer el cambio de variable, $t = \tan(x)$ con lo cual $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$)

9. Sean f y g funciones derivables en $[a,+\infty)$ con derivadas de primer orden integrables en el mismo intervalo y tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Probar que entonces $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ converge.

10. Clasificar:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ (Sug: utilizar el ejercicio anterior) (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ (Sug: escribir $\operatorname{sen}(t^2) = 2t\operatorname{sen}(t^2)\dfrac{1}{2t}$ y usar partes) ¿Se cumple que $\operatorname{sen}(t^2)$ tiende a 0?

   (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx$

11. *a*) Probar que para $x \to +\infty$ vale que

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

   b) Probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge mientras que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ diverge

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B$. Probar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) - f(t)\,dt$ converge y calcular su valor.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \begin{cases} -x\int_{-\infty}^{x} f(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\int_{x}^{+\infty} f(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a) Investigar si F es continua

   b) Probar que F es derivable en todo $x \neq 0$ y que es derivable en $x = 0$ si solo si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) - f(t)\,dt = 0$. Calcular F' en este caso y determinar si F' es continua

14. Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable que toma solamente valores positivos. Se pueden extender a este caso las fórmulas vistas para el área y el volumen del cuerpo de revolución generado por la gráfica de la función alrededor del eje de las abscisas (observemos que en este caso es un cuerpo no acotado). Las fórmulas son:

$$A(f) = 2\pi \int_a^{+\infty} f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt,$$

$$V(f) = \pi \int_a^{+\infty} (f(t))^2\,dt.$$

Cuando $A(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene área finita, y cuando diverge decimos que tiene área infinita. De la misma forma, cuando $V(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene volumen finito, y cuando diverge decimos que tiene volumen infinito.

Considere la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$. Demuestre que el cuerpo de revolución obtenido tiene área infinita pero volumen finito.

15. La función Gamma se define como $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt \ \forall x > 0$.

    a) Probar que $\Gamma(n)$ es una integral impropia convergente $\forall n \in \mathbb{N}^*$.(En realidad se puede ver que es convergente y derivable $\forall x \in \mathbb{R}^+$.)

    b) Encontrar una relación entre $\Gamma(n)$ y $\Gamma(n-1)$.

    c) Probar que $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, lo cual muestra que Γ es una extensión del factorial a todos los reales positivos.

16. Determinar para que valores de α las siguientes integrales impropias converjan

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1}\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log(x)} \qquad \text{(c)} \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{(\log(x))^\alpha} \qquad \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha}\,dx$$

2. Series

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de comparación.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$$

2. Usar el criterio de la raíz para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

3. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio del equivalente.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$$

$$\text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3 + 2n^2 + 8n + 5)}{n^5 + 4n^3 + 15}$$

5. Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando sus sumas en caso de serlo.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty}5^{n+1} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+5}$$

$$\text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+3)} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) \qquad \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \qquad \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{e^n} \qquad \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$$

6. Usando el criterio integral clasificar las siguientes series

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log(n)}} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2}$$

7. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ y $\displaystyle\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

8. Clasificar las siguientes series

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n) \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}-1 \qquad \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\log(n)]^k} \qquad \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\log(n)]^n}$$

$$\text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \qquad \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \qquad \text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^{2n}}$$

$$\text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{n} \qquad \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty}(\log(n+1)-\log(n)) \qquad \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty}(\log(n^2+1)-\log(n^2)) \qquad \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}e^{-n}$$

9. A un fabricante de baldosas se le ocurrió el siguiente diseño para su nueva partida de baldosas cuadradas de 20 cm de lado: construimos el cuadrado de vértices los puntos medios de la baldosa y pintamos el triángulo superior izquierdo, ver figura 1.

   Luego repetimos el procedimiento en el cuadrado interior, ver figura 2. Así infinitas veces hasta formar el dibujo (una especie de espiral), ver figura 3. El fabricante tiene dos preocupaciones que pedimos respondan.

   a) ¿Cuál es el área a pintar en cada baldosa en el diseño ideal?

   b) Como podría demorar tiempo infinito en pintar cada baldosa, el fabricante decide pintar la mitad del n-ésimo cuadrado, ver figura 4. El dibujo se puede considerar inalterado cuando el área pintada difiere en menos de 1 cm^2 del área del diseño ideal.
   ¿Cuál es el mínimo n para el cual el dibujo de la baldosa queda inalterado?

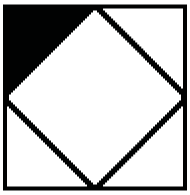

Figura 1

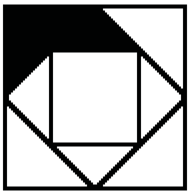

Figura 2

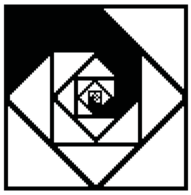

Figura 3

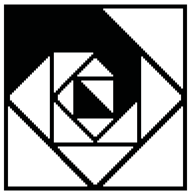

Figura 4
[n = 5]

10. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(n+1) - (n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$$

a) Diverge.

b) Converge a $\pi/2$.

c) Converge a π.

d) Converge a 1.

e) Converge a $-\pi/4$.

(Se define $arctg(x)$ como el único $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $tg(y) = x$).

11. *a*) Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué.

$$\text{(a)} \quad \sum \frac{1}{a_n} \qquad \text{(b)} \quad \sum a_n^2 \qquad \text{(c)} \quad \sum \sqrt{a_n} \qquad \text{(d)} \quad \sum \log(1 + a_n)$$

b) Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ dos series divergentes de terminos no negativos. ¿Que se puede afirmar acerca de la convergencia de las series $\sum \text{mín}\{a_n, b_n\}$ y $\sum \text{máx}\{a_n, b_n\}$

c) Sea $\sum a_n$ una serie de terminos no negativos. Se le asocia una sucesión b_n tal que $b_0 = 0$ y $2b_{n+1} = b_n + \sqrt{b_n^2 + a_n}$, $\forall n \geq 0$. Mostrar que $\sum a_n$ converge si solo si (b_n) converge.