Práctico 9 - Cálculo de integrales

1. Teorema fundamental y regla de Barrow

1. Utilizando los resultados del ejercicio 9 del práctico 5 sección Derivación, calcular:

$$\text{(a)} \quad \int_a^b \sin^2(t)dt \qquad \text{(b)} \quad \int_a^b \log(t)\, dt \quad a,b \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{(c)} \quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad \text{(d)} \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad a,b \in [-1,1] \qquad \text{(e)} \quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad a,b \in [-1,1]$$

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$\text{(a)} \quad \int_1^x \frac{e^t}{3+\sin(t)}\, dt \qquad \text{(b)} \quad G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\, dt \qquad \text{(c)} \quad H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4}\, dt$$

3. *a*) Demueste que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de x

$$\text{(a)} \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\ , \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

   b) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para

$$\text{(a)} \quad f(x) = \int_0^x 1 + \sin(\sin(t))\, dt \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \int_1^x \cos(\cos(t))\, dt$$

   c) Halle una función g tal que

$$\text{(a)} \quad \int_0^x g(t)t\, dt = x + x^2 \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{x^2} g(t)t\, dt = x + x^2$$

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que

   a) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log(f(b)) - \log(f(a))$

   b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} dt = \sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}$

   c) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b) - f^2(b)$

   d) Calcular las siguientes integrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\, dt \qquad \text{(b)} \quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)}}\, dt \qquad \text{(d)} \quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^{2n}+1}}$$

$$\text{(e)} \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\, dx \qquad \text{(f)} \quad \int_a^b \cos(x)\sin(x)\, dx \qquad \text{(g)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2(x)}{a+b\tan(x)}\, dx$$

5. *a*) Hallar la primitiva F de la función

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)\log(\cos(x)),\ \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

que verifica $F(0) = 0$.

b) Calcular el primer término no nulo en el desarrollo de Taylor de F alrededor de 0.

c) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^4}$$

6. Calcular:

$$\text{(a)} \int \frac{1}{3x-1}\,dx \qquad \text{(b)} \int \operatorname{tg} x\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \text{(d)} \int \sqrt{e^x}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx \qquad \text{(f)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad \text{(g)} \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx \qquad \text{(h)} \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$$

$$\text{(i)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(j)} \int \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad \text{(k)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \text{(l)} \int_1^e \frac{1}{x}\operatorname{sen}^3(1+\log x)\,dx$$

7. Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$

a) Expresar $A(t)$ (no calcularla).

b) Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

8. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

a) Calcular el polinomio de Taylor en 0 de orden 4.

b) Determinar $F(0{,}5)$ con un error menor a 10^{-5}.

2. Metodos de integración

1. Integrar usando el método de sustitución:

$$\text{(a)} \int (2x+3)^7\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}\,dx \qquad \text{(c)} \int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{x}{1+9x^2}\,dx \qquad \text{(f)} \int \frac{1}{e^{5x}}\,dx \qquad \text{(g)} \int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx \qquad \text{(h)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$$

$$\text{(i)} \int x^2\sqrt{x+3}\,dx \qquad \text{(j)} \int x^{n-1}\sin(x^n)\,dx \qquad \text{(k)} \int x e^{x^2}\,dx$$

2. Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica

$$\text{(a)} \int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad x = t^2+1 \qquad ;\text{(b)} \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx \quad x = 4\sin^2(t) - 2$$

3. Sea $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua y tal que $f(0) = f(2) = 0$. Determinar si son verdaderas las siguientes igualdades:

$$\text{(1)} \int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx \quad \text{(2)} \int_0^2 e^x f'(x)\,dx = -\int_0^2 e^x f(x)\,dx$$

4. Si se aplica la sustitución $x = \sin(t)$ a la integral $\int_0^\pi t^3 \cos(t)\, dt = \int_0^0 (\arcsin(x))^3\, dx = 0$ ¿ Por que es equivocado este razonamiento?

5. Calcular integrando por partes:

$$\text{(a)} \int x \operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{(b)} \int x 2^{-x}\, dx \qquad \text{(c)} \int x^2 e^x\, dx \qquad \text{(d)} \int x \operatorname{arctg} x\, dx$$

$$\text{(e)} \int x^2 \log x\, dx \qquad \text{(f)} \int \log x\, dx \qquad \text{(g)} \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \qquad \text{(h)} \int \cos x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\text{(i)} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx \qquad \text{(j)} \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{(k)} \int \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx \qquad \text{(l)} \int \log^2(x)\, dx$$

6. Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\text{(a)} \int \frac{x-1}{x^2-x-2}\, dx \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x^2+x+2}\, dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx \qquad \text{(d)} \int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\, dx \qquad \text{(f)} \int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\, dx \qquad \text{(g)} \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$$

$$\text{(h)} \int \frac{x^2+x}{x^2-1} dx \qquad \text{(i)} \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx$$

3. Cálculo de integrales

1. Sea f continua. Demostrar que $\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx$. Calcular $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

2. Calcular las integrales

$$\text{(a)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\, dx \qquad \text{(b)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\, dx \qquad \text{(c)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{(d)} \int \frac{1}{\cos(x)}\, dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \qquad \text{(f)} \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\, dx$$

3. *a*) Probar que $\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$. Calcular $\int_0^1 x^2 (1-x)^{30}\, dx$.

   b) Sea f una función continua. Probar que $\int_0^\pi x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))\, dx$, y calcular $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$

   c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

4. Calcular las siguientes integrales

$$\text{(a)} \int_1^e \frac{1}{x} \sin^3(1+\log(x)) dx \qquad \text{(b)} \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$$

5. *a*) Sea $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx$ $n \in \mathbb{N}$. Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1}(x) \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Calcular

$$\text{(c)} \quad \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad \text{(d)} \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2} \qquad \text{(e)} \quad \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$$

6. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int \operatorname{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1)\,dx$$

Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

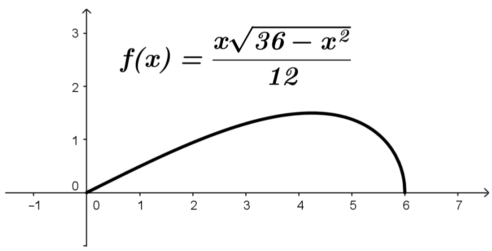
4. Modelos

1. Hallar el área encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones
   - *a*) $f(x) = e^{x-1} - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0,2]$
   - *b*) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en el intervalo $[2,4]$
   - *c*) $f(x) = 0$ y $g(x) = x^2 + x - 2$ en el intervalo $[1,2]$
2. Calcular el área del círculo de radio r. Calcular el área de la elipse de de ejes de medida $2a$ y $2b$
3. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleracion en el instante t esta dada por $a(t) = t(t-100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0 y su velocidad inicial era 2m/s. ¿ Cual es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?
4. El volumen de un cuerpo de revolución se puede calcular usando la formula

$$V = \int_a^b \pi r(x)^2 dx$$

   donde $r(x)$ es el radio del círculo obtenido al girar la figura alrededor del eje de revolución. Usando esta fórmula calcular los siguientes volúmenes:
   - *a*) volumen de la esfera de radio R;
   - *b*) volumen del cono recto de base circular de radio R y altura h;
   - *c*) volumen de la copa (o paraboloide elíptico): $x^2 + y^2 = z \leq 1$ (en la intersección con el plano $x = 0$ se tiene parábola $z = y^2$).
5. Diseño de una aplomada.

   Se le ha pedido que diseñe una aplomada que pese alrededor de 190g. Para cumplir su cometido decide que su forma debe ser similiar al sólido de revolución generado por la funcion f de la figura. Determine el volumen de la aplomada. Si para su fabricación elgie un laton que tiene densidad de 8,5g/cm^3. Cuánto pesará la aplomada?



6. (*Segundo parcial primer semestre 2014*)
Tenemos un cono de altura h y radio en la base r.

   a) Sabemos (no se pide demostrar) que el área de revolución engendrada por el giro de la curva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, alrededor del eje Ox es:

   $$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

   Calcular el área de la superficie del cono de revolución (sin base) de altura h y radio de la base igual a r.

   b) Deducir la fórmula del volumen del cuerpo de revolución que resulta de girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, alrededor del eje Ox.

   c) Calcular el volumen del cono de revolución de altura h y radio de la base igual a r.

   d) Una marca famosa de helados está lanzando un nuevo cono helado. El cono debe llevar 50π cm^3 de helado (y no puede sobresalir del cono). El material que se usa para hacer el envoltorio es costoso, por tanto se quiere que el cono tenga la menor superficie posible. Calcular h y r del nuevo cono helado.

7. Recordemos que la longitud de arco de una curva $f(x)$ para $a \leq x \leq b$ está dada por la fórmula

   $$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

   a) Calcular la integral indefinida

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

   usando la sustitución $y = x + \sqrt{1+x^2}$.

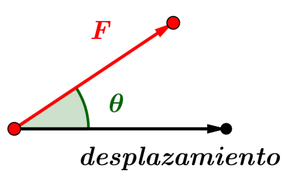
   b) Probar que la longitud del arco de la parábola $f(x) = ax^2$ para un $a \in \mathbb{R}$ y el intervalo $[0,b]$ es igual a

   $$\frac{b}{2}\sqrt{1+4a^2b^2} + \frac{1}{4a}ln|2ab + \sqrt{1+4a^2b^2}|.$$

   Sugerencia: usar integración por partes, luego sumar y restar 1 en el lugar apropiado de la integral obtenida y terminar aplicando la parte *a*).

8. Explicar por que 'el recorrido es la integral de la velocidad'. Sugerencia: Recordar que la afirmación es valida si la velocidad es constante.

9. El trabajo W invertido sobre un sistema por un agenteque ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento es $W = F\Delta r\cos(\theta)$



   En el caso de que de que la fuerza sea variable en dirección y sentido pero la dirección del desplazamiento no, digamos que va desde a hasta b , entonces el trabajo es $W = \int_a^b F(x)\cos(\theta(x))dx$.
   Conjeturar sobre el por que de esta definición, apartir de la definición para fuerza constante.

a) Una partícula se desplaza sobre una dirección desde $x = 0m$ hasta $x = 4m$. Esta particula se encuentra sometida a una única fuerza F_x dada por $F(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{si } x \leq 2 \\ 6-(1{,}5)(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Calcular el trabajo realizado por F_x

b) Una pelota de $0{,}37kg$ de masa se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de $14m/s$, y alcanza su altura maxima a $8{,}4m$ del punto de lanzamiento.

1) Halle el trabajo realizado por la fuerza de fricción del aire sobre la pelota desde que se lanza hasta que se alcanza la máxima altura

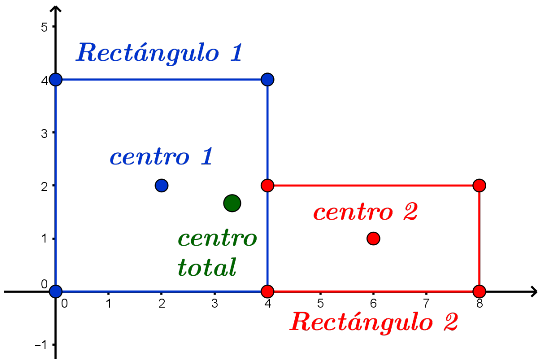
2) Suponiendo que la fricción del aire realiza el mismo trabajo durante la caida calcule el módulo de la velocidad de la pelota cuando vuelve al punto de partida

10. El centro de gravedad de una superficie plana se define, conceptualmente, de la siguiente manera:

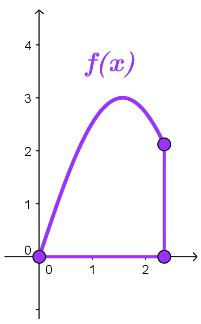
Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecera en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del carton.

Claramente para un cuadrado, un rectangulo, una circunferencia y un triangulo equilatero el centro de gravedad coincide con el centro geometrico de la figura.

Si se pegan 2 rectangulos como en el de la figura entonces el centro de gravedad es centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es (M_x, M_y), donde $M_y = \int_a^b f(x)^2 dx$ y $M_x = \int_a^b f(x) x dx$. Bosquejar un argumento sobre esta fórmula apartir del caso de los rectángulos.



a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide ($f(x) = \sin(x)$)

b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola $x^2 - 1$ y el eje Ox. Repetir la cuenta para la figura anterior intersección el primer cuadrante.

c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi elipse

5. Complementarios

1. Calcular el área encerrada entre:

   a) la parábola $y = x^2$ y la recta $2x + 3$.

   b) la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

   c) la recta $y = x + 5$ y la parábola $\frac{x^2}{2} + 1$.

2. Suponga que f' es integrable en $[0,1]$ y que $f(0) = 0$. Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ se verifica

$$| f(x) | \leq \sqrt{\int_0^1 | f'(x) |^2 \; dx}$$

   Demuestre que la hipotesis $f(0) = 0$ es necesaria.

3. **Integrales de funciones trigonometricas racionales**

   Recordando que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ y $\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, expresar $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ en función de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

   a) Probar que integrales de la forma $\int R(\text{sen}(x), \cos(x))dx$ donde R es una funcion racional, pueden ser reducidas mediante sustitución $u = \tan(\frac{x}{2})$ a integrales de la forma $\int r(u)du$, donde r es tambien es una funcion racional. Calcular

$$\text{(a)} \quad \int \frac{dx}{\cos(x) + \sin(x)} \qquad \text{y} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)dx}{1 + \cos(x) + \sin(x)}$$

   b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ y la sustitucion $x = a\sin(t)$. Calcular

$$\int \frac{xdx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$$

   c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ y la sustitución $x = a\sinh(t)$. Calcular

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}}$$

   d) Idem con $\int R(x, \sqrt{-a^2 + x^2})$ y la sustitucion $x = a\cosh(t)$. Calcular

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x^2}$$

4. Sea $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua y tal que $f(0) = f(2) = 0$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

   - $\int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx$
   - $\int_0^2 e^x f'(x)\,dx = \int_0^2 2e^x f(x)\,dx$

5. *a*) Demuestre que si f es continua entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

b) Demuestre que si f es continua

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_1} (f(t)dt)\, du_1\right) du_2$$

6. *a*) Integrando por partes deducir la formula

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx \qquad \forall n \leq 2$$

b) Hallar una formula de recurrencia para $\int \cos^n(x)\,dx$

c) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx$$

d) Por definicion el doble factorial es $n!! = \pi_{k=0}^{m}(n-2k)$ donde $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ y $0!! = 1$. Sea $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$. Probar que

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ ; \qquad \text{y que } a_{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1+\frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} 2n(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!})^2$ y concluir que $\sqrt{\pi} = \lim_{n\to 0} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$

f) Calcular las integrales

$$\text{(a)} \quad \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m+1}(x)\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m}(x)\,dx$$

7. Realize una lista de familias de funciones que sabe integrar, por ejemplo: polinomios, $\sin^2(ax)$, etc. Revisar cuantas de las integrales del práctico estan incluidos en esa familia.