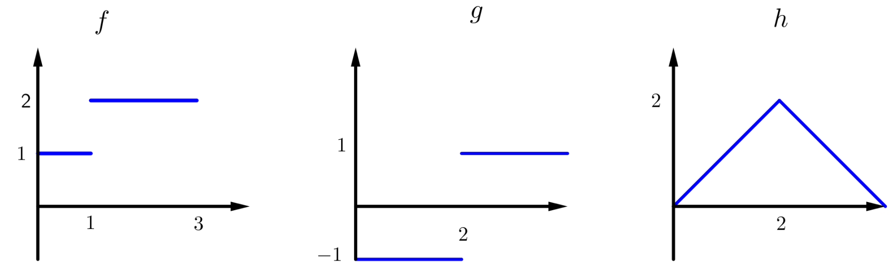
Práctico 8 - Integrabilidad y Teorema Fundamental

1. Integrales geometricas

En esta sección se trabajara con la idea intuitiva de integrales, donde la integral de una función f en el intervalo $[a,b]$ es el área signada entre el gráfico y el eje x

Algunos ejemplos de integrales



- $\int_0^3 f(t)dt = 1\times 1 + 2\times 2 = 5$
- $\int_0^2 g(t)dt = -1\times 2 = -2, \quad \int_0^4 g(t)dt = 0$
- $\int_0^4 h(t)dt = \frac{2\times 2}{2} = 2$

Todos los resultados de esta sección se podran probar formalmente luego, aquí estan para dar ideas intuitivas del problema y trabajar con acotaciones.

Se recuerdan las propiedades de área.

Propiedades basicas de áreas

- Si $A\subset B$ entonces $Area(A)\le Area(B)$
- El área de un rectangulo R de lados a y b es $Area(R) = ab$
- Si $A\cap B = \emptyset$ entonces $Area(A\cup B) = Area(A) + Area(B)$. Ademas si dos rectangulos R_1 y R_2 se intersecan solo en lados $Area(R_1\cup R_2) = Area(R_1) + Area(R_2)$

Se puede asumir que todas las funciones de esta sección son integrables. Posteriormente podrán probar que lo son.

1. Calcular la integral de las siguientes funciones en $[0,2]$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = x + [x]$ (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n \le x \le \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 1 - \left(x - \left(\left(\frac{1}{2}^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$

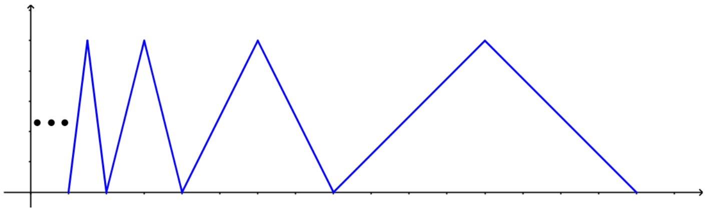


Figura 1: bosquejo del ejemplo 1.d

2. *a*) Calcular las integrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin(kt) + 5\, dt\,, \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(kt) + 5\, dt\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

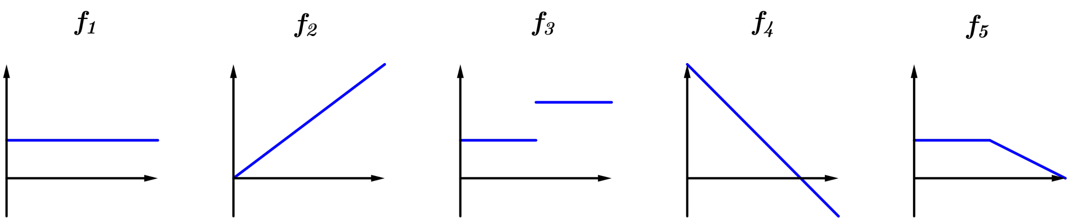
   b) Determinar el signo de las siguientes integrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2} \sin(x^2\pi) dx \qquad \text{(b)} \quad \int_{-1}^{1} \cos(x^2\pi) dx$$

3. Que valores de a y b, $a < b$, maximizan el valor de $\int_a^b x - x^2 dx$
4. Sabiendo que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:
   a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$.
   b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.
5. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx \leq \frac{1}{2}$$

6. Bosquejar las funciones $F_i(x) = \int_0^x f_i(t) dt$, para las siguientes funciones.



   Conjeturar sobre si las funciones F_i son derivables
7. Calculo de integrales trigonometricas
   a) Calcular la integral $\int_0^{2\pi} \sin(x) + 3dx$
   b) Bosquejar en los mismos ejes las funciones $f(x) = \sin(x) + 3$ y $g(x) = 1 - \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

c) Calcular el area entre las graficas de f y g

d) Calcular las integrales de

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx$, $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx$

2) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\ dx$

8. Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ 0 & \text{si } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Graficar las funciones $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $h(x) = \int_0^x g(t)dt$

2. Sumas de Riemann

1. Calcular $\int_1^3 x^2\, dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas. Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Calcular $\int_a^b e^x\, dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas. Recordar que $\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}$.

3. Probar que si f es una función integrable, entonces la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.

4. Acotar el área del círculo de radio 1 con un error menor al 0,1 %

5. Probar que una función monotoma creciente y acotada es integrable. Sugerencia: Para probar que es integrable en el intervalo $[a,b]$, tomar una partición equispaciadas de tamaño $\frac{b-a}{n}$

6. Suponga que f es una funcion continua y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

   a) Asumiendo que existe el límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ probar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene que

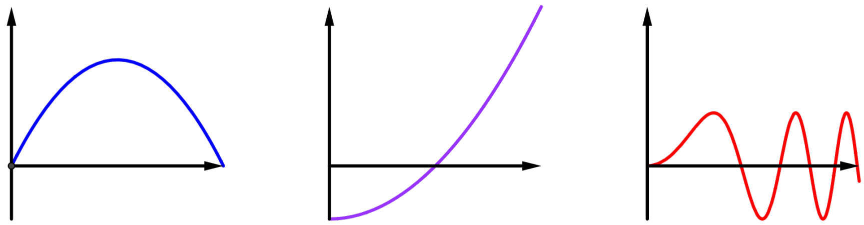
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$$

   b) Probar que el limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ existe y ademas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a$$

3. Valor medio y teorema fundamental

1. Para las siguientes funciones bosquejar las funciones $F(x) = \int_0^x f(t)dt$



2. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

Sugerencia: toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ da origen a una partición $P' = \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a+c, b+c]$ y viceversa.

3. Probar que si f es continua y no negativa en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \;\forall\, x \in [a,b]$$

4. Dar un ejemplo de función integrable f tal que$\forall c \in [a,b]$ se cumple que $\int_a^b f(x)\,dx \neq (b-a)f(c)$

5. Utilizar el teorema del valor medio para probar que

$$\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\log(t)} - \frac{1}{t\log(t)} \right) dt = 0$$

6. Sea f continua en $[2,8]$, tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

   a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

   b) Probar que existe $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = 16$.

7. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (b) $f_2(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (c) $f_3(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

(d) $f_4(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (e) $f_5(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

8. Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{(a)} \quad \int_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad \int_1^x f(t)dt = \log(x^2+2x+2) - c$$

$$\text{(c)} \quad \int_c^x f(t)dt = (x-1)^4 \qquad \text{(d)} \quad \int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$$

9. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

$$i)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \quad ii) f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \quad iii)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

10. Sea f una función continua, monótona estricta en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

   a) Probar que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \ \forall x \in [a,b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$ y $\int_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

11. a) Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu$$

   para un cierto $\mu \in [m,M]$.

   b) Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ para un cierto $\xi \in [a,b]$. Este resultado se conoce como el teorema del valor medio para integrales. Ver con un ejemplo que la continuidad es esencial.

   c) De un modo más general si f es continua en $[a,b]$ y g y fg son integrables y g es no negativa en $[a,b]$ demostrar que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ para un cierto $\xi \in [a,b]$. Este resultado se conoce como segundo teorema del valor medio para integrales.

   d) Deducir el mismo resultado si g es no positiva (en vez de no negativa) en $[a,b]$ y observar que la hipótesis de que g no cambia de signo en $[a,b]$ es esencial.

12. Consideremos la función $y = F(x)$ definida por la fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{\log(3) - s^2}\,ds.$$

Sea $g = F^{-1}$. Calcular la derivada de g en $y = 0$.
Observación: La integral que aparece en este ejercicio no admite una expresión elemental, por lo que no es posible hallar una fórmula para g.

13. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int\limits_{x}^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

   a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.

   b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

14. Indicar si es verdadero o falso que:

   Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y F una primitiva de f tal que $F(0) = 4$ necesariamente

$$\int_0^x F(t)f(t)dt = \frac{(F(x))^2}{2} - 8$$

4. Complementarios

1. Sean f y g dos funciones integrables. Seleccione la cantidad mínima necesaria de hipótesis para que $f = g$ y de contraejemplo en los casos falsos.

   a) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $\int_a^b f = \int_a^b g$ entonces $f = g$

   b) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $\int_a^b f = \int_a^b g$ y ademas f, g son continuas entonces $f = g$

   c) Si $\int_a^b f = \int_a^b g$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ entonces $f = g$

   d) Si $\int_a^b f = \int_a^b g$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y f y g son continuas entonces $f = g$

2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt$

3. **Otra posible definición de la función exponencial**

   Definimos la función logaritmo como una primitiva de $\frac{1}{x}$, mas precisamente

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

   a) Probar que la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es creciente e infinitamente derivable.

   b) Definimos a la función inversa de log como $exp : I \to \mathbb{R}$, en su dominio de definición.
   Probar que $(\exp(x))' = (\exp(x))$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada positiva y tal que $f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

   Cual de los siguientes enunciados son ciertos

   a) La función g es continua

   b) La función g es derivable

   c) La grafica de g tiene tangente horizontal en 1

   d) La función g tiene un mínimo local en 1

   e) La función g tiene un máximo local en 1

   f) La función g tiene un punto de inflexión en 1

   g) La grafica de g' corta al eje x en el punto $x = 1$

5. *a*) De ejemplo de 2 funciones f, g que sean integrables pero que $f \circ g$ no lo sea.

   b) Determinar si es verdadero o falso la siguiente afirmacion. Si f^2 es integrable entonces f lo es

6. Se consideran las funciones $J, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defindas por

$$J(x) = \arctan(x) - \frac{x}{x^2+1}, \quad H(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt$$

a) Calcular H', J', $J(1)$, $H(1)$.

b) Hallar la forumla explicita de $H(x)$, distinguir para x positivo y negativo.