Práctico 7 - Desarrollo de Taylor

1. Polinomio de Taylor

1. El polinomio de Mc Laurin de orden 4 asociado a una cierta función f es $3-5x+4x^2-x^3-2x^4$. Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$.

2. Hallar el desarrollo de Mc Laurin de orden n de las siguientes funciones:

$$a)\ \frac{1}{2-x} \qquad b)\ \frac{1}{a-x} \qquad c)\ \log(1-x) \qquad d)\ \frac{1}{x^2-2x+1}$$

$$e)\ e^x-\cos(x) \qquad f)\ \operatorname{sen}(x)\cos(x) \qquad g)\ \operatorname{sen}^2(x) \qquad h)\ \sqrt{1-x}$$

3. Calcular $P_n(f,0)$ para la función $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. Sugerencia existen $a,\ b\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$.
   Calcular el $P_n(f,0)$ para la función $f(x)=\log(\frac{1+x}{1-x})$

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio definido por $f(x)=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n x^n$.
   Calcular $P_n(f,0)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ y $P_n(f,1)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-1)^k$.
   ¿Se verifican las igualdades $\alpha_k=a_k=b_k$ para $k\le n$? En caso negativo ¿Se verifica alguna?
   Verificar que $P_n(f,0)$ es mantener solo los términos de orden menor igual a n. Es lo mismo para $P_n(f,1)$, es decir $P_n(f,1)=P_n(f,0)$?
   Probar que si $n\ge N$ entonces $f=P_n(f,0)=P_n(f,1)=P_n(f,a)$ para todo $a\in\mathbb{R}$

5. Sea $f(x)=a^x$ con $a>0$. Probar que $P_n(f,0)=\sum\frac{\log(a)^k}{k!}x^k$

6. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\operatorname{sen}x}{x^2+4x^3} \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x^\alpha},\ \alpha>0$$

$$d)\ \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-\cos(x)}{x^2} \qquad f)\ \lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}} \qquad g)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$$

$$h)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^2/2+\operatorname{sen}x-2x}{1-\cos x-x^2/2} \qquad i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2/2}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$$

7. Determinar los valores de los parámetros para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x\to 0$. Hallar la parte principal.

$$a(e^x-1)-bx^2-x \qquad x+a\operatorname{sen}x+b\operatorname{tg}x \qquad e^x\ \operatorname{sen}x-(ax+bx^2+cx^3)$$

$$\log(1+x)-\frac{ax+bx^2}{1+cx} \qquad a(e^x-x-1)+b\operatorname{sen}x+c\log(1+x)-x \qquad \cos x-\frac{1+2ax^2}{1+3bx^2}$$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable, y a un punto critico de f. Determinar si en a se da un extremo local, máximo o mínimo, o no, en función de su polinomio de Taylor en a

9. ¿Cuál es el comportamiento local de $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ alrededor de 0? Bosquejar la gráfica de f en algún entorno de 0.

10. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \frac{x^3}{6}$
    (a) Encontrar el polinomio de Mc Laurin de orden 4 de f.
    (b) Analizar si f presenta un máximo o un mínimo relativo en 0.
    (c) Calcular, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$

11. Sea f de clase C^3 tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) = 4$
    (a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en 0.
    (b) Si $a_n = f(1/n)$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$, hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

12. *a*) Demuestre que si existe $f''(a)$ entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Este limite se denomina segunda derivada de Schwarz de f en a.

b) Sea $f(n) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ demuestre que la segunda derivada de Schwarz existe en 0 pero $f''(0)$ no existe

c) Demuestre que si f tiene un maximo local en a y la segunda derivada de Schwarz existe entonces esta es menor o igual a 0.

d) Demuestre que si existe $f'''(a)$ existe entonces

$$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)}{h^3}$$

13. Sean f y g dos funciones n veces derivables, notemos $P_n(f,0) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $P_n(g,0) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$.

a) Calcular el polinomio $P_n(f+g,0)$ en funcion de a_k y b_k

b) Calcular el polinomio $P_n(fg,0)$ en funcion de a_k y b_k

c) Suponga que $f(0) = 0$. Calcular el polinomio $P_n(g\circ f,0)$ en funcion de a_k y b_k

d) Calcular los siguientes polinomios de Taylor

a) $P_{1000}\left(x^{500}e^{x^2},0\right)$ *b*) $P_{10^{1000}}\left(\sin(x^5),0\right)$ *c*) $P_{1000}((\cos(x^2),0)$

d) $P_{10000}(x^{10}\sin(x^2),0)$ *e*) $P_{9000}(\log(1+x^3),0)$ *f*) $P_{20}(e^{\sin(x)^2},0)$ *g*) $P_{20}(\log(\sin(x)+1),0)$

e) Sea f una función n veces derivable y $P_n(f,0) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ su polinomio de Taylor de grado n en 0. Calcular $P_{n-k}(f^{(k)},0)$ en función de los terminos a_k

2. Estimaciones y Series de Potencias

1. Encontrar la expresión de Lagrange del resto de orden n correspondiente a la función $\log(1+x)$. Usando el desarrollo de Mc Laurin de $\log(1+x)$, calcular $\log(1,5)$ con error menor que $0,001$. Comparar este resultado con el valor para $\log(1,5)$ que da la calculadora. Volver a hacer el ejercicio con error menor que $0,0001$.

2. Encontrar la expresión de Lagrange del resto de orden 8 correspondiente a la función $\operatorname{sen} x$. Usando el desarrollo de Mc Laurin de orden 8 calcular un valor aproximado de $\operatorname{sen} 1$ y demostrar que el error cometido es menor que $3 \cdot 10^{-6} = 0,000003$.

3. Hallar $e^{0,1}$, sen(0,2) y cos(0,2) con errores menores que 0,001.

4. Sea $f(x) = 6\operatorname{senh}(x) + 3x^2 - 4x + 5$
   - Hallar $P_3(f,0)(x)$ y la expresión de $r_3(x)$ (el resto de Lagrange).
   - Deducir que $0 \leq f(x) - P_3(f,0)(x) \leq \frac{3}{8}$ en el intervalo $[0,1]$.

Cuando una función f es infinitamente derivable se puede construir, formalmente, una serie correspondiente a el limite en n del polinomio de Taylor. Esto es lo que se estudiara en esta sección.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función C^∞ y $a \in I$, definimos, en donde exista, la función

$$S_a(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} P_n(f,a)(x)$$

5. **Ejemplo** e^x
   a) Mostrar que $f^{(n)}(0) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$
   b) Probar que $S_0(x)$ esta bien definido para todo $x \in (-1,1)$
   c) Probar que $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, para todo $x \in (-1,1)$. Deducir que $S_0(x) = f(x)$ para todo $x \in (-1,1)$
   d) Probar que $\forall a \in \mathbb{R}$, $S_a(x)$ esta bien definido para todo $x \in (a-1,a+1)$. Deducir que $S_a(x) = f(x)$ para todo $x \in (a-1,a+1)$.
   e) Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.
   f) Deducir que $S_0(x)$ esta bien definido para todo $x \in \mathbb{R}$ mas aun $S_0(x) = f(x)$.

6. **Ejemplo** $\sin(x)$ **y** $\cos(x)$
   a) Mostrar que $| f^{(n)}(x) | \leq 1$.
   b) Repetir las partes *b*), *c*) y *f*) del ejercicio anterior

7. **Ejemplo** $\frac{1}{1-x}$
   a) Calcular $f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
   b) Probar que $S_0(x)$ esta bien definido para todo $x \in (-1,1)$
   c) Probar que $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, para todo $x \in (-1,1)$. Deducir que $S_0(x) = \frac{1}{1-x}$ para todo $x \in (-1,1)$
   d) Probar que para $x < -1$ la serie $S_0(x)$ no converge, apesar de que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ si existe y es derivable infinitas veces.
   e) Inducir los mismos resultados para la función $g(x) = \log(1-x)$

f) **Ejemplo** $\frac{x^k}{1-x}$

1) Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $P_n(f,0)(x)$.
2) Sea $P_n(g,0)$ el polinomio de Taylor de $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Probar que $P_{n+k}(f,0)(f,0)(x) = x^k Q_n(g,0)(x)$.
3) Concluir que $\forall x \in (-1,1)$ existe $S_0(x)$ y además $S_0(x) = f(x)$

g) **Ejemplo** $\frac{1}{1-ax^k}$

1) Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $P_n(f,0)(x)$.
2) Sea $P_n(g,0)(x)$ el polinomio de Taylor de $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Probar que $P_{nk}(f,0)(x) = Q_n(g,0)(ax^k)$.
3) Concluir que $\forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[k]{a}}, \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right)$ existe $S_0(x)$ y además $S_0(x) = f(x)$.

h) **Ejemplo** $\frac{x^k}{1-ax^l}$**,** $a > 0$

1) Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $P_n(f,0)(x)$.
2) Calcular $P_n(f,0)(x)$.
3) Concluir que $\forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[l]{a}}, \frac{1}{\sqrt[l]{a}}\right)$ existe $S_0(x)$ y ademas $S_0(x) = f(x)$.

8. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que $S_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deducir que $S_0(x) \neq \varphi(x)$, $\forall x > 0$.

Tenemos asi un ejemplo de una función para la cual S_0 esta definida en todo $\mathbb{R}$ sin embargo no es igual a la función de la cual obtuvimos S.

Probar que $\forall a > 0$ el conjunto $\{f^{(n)}(x) : x \in (0,a)\}$ no esta acotado, mas aun el conjunto $\left\{\frac{f^{(n)}(x)}{n!} : x \in (0,a)\right\}$ no esta acotado

3. Modelos

1. La resistividad ρ de un cable conductor es inversa a la conductividad y se mide en ohm metros $(\Omega - m)$.

   La resistividad de un metal depende de la temperatura de acuerdo a la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

   donde t es la temperatura medida en $°C$

   Hay tablas para los valores de α y ρ_{20}, la resistividad a $20°C$.

   Excepto para valores de temperatura muy bajas, la resistividad varia similar a la lineal con la temperatura, por tanto es común usar la expresión lineal o cuadrática del polinomio de Taylor en $t = 20$.

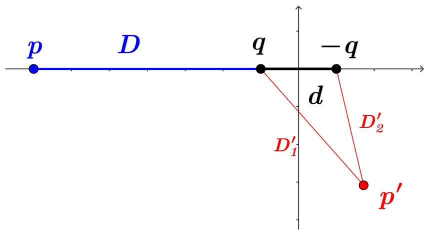
   a) Determina la expresiones de aproximación lineal y cuadrática
   b) Para el cobre $\alpha = 0{,}0039/°C$ y $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8} \Omega - m$. Grafica la resistividad del cobre y la aproximación lineal y cuadrática para $x \in [-250, 1000]$ (Usar un software para graficar)
   c) Para que valores de t la aproximación lineal coincide con la receptividad a menos de 1 % (usar un software para calcularlo)

2. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas de igual magnitud y signo opuesto, Si las cargas son q, $-q$ y están a distancia d, el campo eléctrico E en el punto p de la figura es

$$E(D) = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

y la formula general, para un punto p' es

$$E(p') = \frac{q}{(D_1')^2} - \frac{q}{(D_2')^2}$$

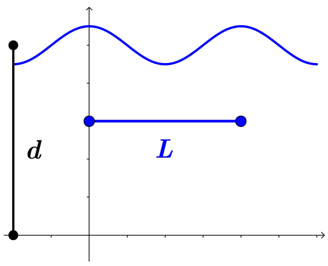


Determinar que puntos del plano el campo es 0.

Para puntos sobre el eje x expandiendo la expresión de E en serie de potencias de d/D, mostrar que E es aproximadamente $1/D^3$ cuando P esta lejos del dipolo.

3. Si una ola de largo L se mueve con velocidad v atravez de un cuerpo de agua con profundidad d entonces

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$



   a) Si el agua es profunda, mostrar que $v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$
   b) Si el agua es superficial mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$
   c) Use La expansión en series de potencias para verificar que si $L > 10d$ entonces la estimación $v^2 \approx gd$ tiene una precisión de al menos $0{,}014gL$

4. Complementarios

1. Suponga que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es dos veces derivable y que existen M_0, M_2 tal que $| f(x) | \leq M_0$ y $| f''(x) | \leq M_2$.

   a) Utilize el Polionomio de Taylor apropiado para demostrar que

   $$| f'(x) | \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2 \qquad \forall h > 0$$

   b) Demuestre que $| f'(x) | \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. Surgerencia: considere el menor valor de la expresión que aparece en a)

2. a) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Si f'' esta acotada y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

b) Si existen los limites $\lim_{xto+\infty} f(x)$ y $\lim_{xto+\infty} f''(x)$ entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$

3. Sea f una funcion tal que $f(a) = 0$ y $P_n(f,a) \neq 0$ para algun n. Calcular el limite $lim_{x\to a} \frac{f(x)}{f'(x)}$