Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2016**

Práctico 5 - Derivación, primera parte

En este practico se aceptarán como regla las siguiente derivadas

$$(e^x)' = e^x, \quad (\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \tag{1}$$

1. Derivación

1. Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\quad f(x) = x^n \qquad b)\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad c)\quad f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad d)\quad f(x) = \sqrt{x}$$

2. Las ecuaciones (1) pueden deducirse apartir de algunas hipótesis

   a) Sea $f(x) = e^x$ probar que $f'(x) = e^x$ asumiendo que $f'(0) = 1$

   b) Probar que $(\sin(x))' = \cos(x)$ asumiendo que $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Probar que $(\cos(x))' = -\sin(x)$ asumiendo que $(\sin(x))' = \cos(x)$

   c) Además apartir de (1) y utilizando la regla de la cadena se pueden obtener más resultados. Calcular $(\log(x))'$.

3. Sea $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto tal que f y g son derivables en I

   a) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es derivable y $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

   b) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable y $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

   c) Probar que si $f(x) \neq 0\ \forall x \in I$ entonces la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ es derivable y $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$

   d) Suponga que $f(I) \subset I$. Probar que la función $h(x) = g \circ f(x)$ es derivable y que $h'(x) = g'(-f(x))f'(x)$

   e) 1) Probar que si f es invertible, $f(p) = q$ y $f'(p) \neq 0$, entonces la función $h = f^{-1}$ es invertible y ademas $h'(q) = \frac{1}{f'(p)}$

   2) De un ejemplo de una función f invertible y derivable pero que su inversa no sea derivable.

   f) Sea $h : I \to \mathbb{R}$ funcion cualquiera. Probar que si en a existen las derivadas laterales, esto es,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

   entonces h es continua en a.
   Probar que si las derivadas laterales son iguales entonces h es derivable en a

4. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h}$.

   1) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0.
   2) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?

   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0-h)}{h}$.

   1) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0.

2) Suponiendo que g es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre K y $g'(x_0)$?

5. Sean las siguientes funciones de reales (en su máximo dominio):

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^2+5}{3x+1}, \quad h(x) = e^x.$$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones: g, fg , fh , gh , $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ g$, $f \circ h$.

6. Si f y g son funciones derivables en todo su dominio, halle las siguientes derivadas en función de las derivadas de f y g:

$$a)\quad f(g(x)+x) \qquad b)\quad \frac{f(x)}{g^2(x)+1} \qquad c)\quad \sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2} \qquad d)\quad (f(x))^{g(x)}$$

7. Determinar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que la función f sea derivable

$$f(n) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 0 \\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

8. Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es derivable solo en 0

9. *a*) Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\quad \sin(x)\cos(x) \qquad b)\quad x\log(x)-x \qquad c)\quad \tan(x)$$

b) Probar las siguientes igualdades de funciones trigonometricas

$$a)\quad (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \qquad b)\quad (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad c)\quad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10. Calcular las derivadas, cuando existan, de las siguientes funciones

$$a)\quad \sin(x+x^2) \qquad b)\quad \frac{x}{1-|x|} \qquad c)\quad \left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2 \qquad d)\quad \cos(x\sin(x))+\sin(\cos(x^2))$$

$$e)\quad \sin\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin(x)}\right)}\right) \qquad f)\quad \sin\left(\frac{x}{x-\left(\frac{x}{x-\sin(x)}\right)}\right) \qquad g)\quad (x^2-x+2)^{100} \qquad h)\quad \log(x^2+x+2)$$

$$i)\quad \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \qquad j)\quad \sin(|x|) \qquad k)\quad \cos(|x|) \qquad l)\quad \log\left(\sqrt{\frac{\sin(x)+2}{x^2+2}}\right) \qquad m)\quad \log(|\tan(x)|)$$

11. Calcular los siguientes límites

$$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^\alpha} \qquad b)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(x-1)^\alpha} \qquad c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$$

discutiendo segun $\alpha \in \mathbb{R}^+$

12. Calcular las sucesiones $a_n = f^{(n)}(0)$, es decir la derivada enesima, para las siguientes funciones

$$a)\quad f(x) = e^x \qquad b)\quad f(x) = x^k \qquad c)\quad f(x) = \cos(x) \qquad d)\quad f(x) = \sin(x) \qquad e)\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f)\quad f(x) = \sqrt{x+1} \qquad g)\quad f(x) = \log(x+1)$$

13. Determinar hasta que orden es derivable en 0 la siguiente funcione, apartir de los parametros n y k.

$$g_{(n,k)}(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x^k}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & six = 0 \end{cases}$$

14. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } \mid x \mid < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que φ tiene derivadas de todos los ordenes y que $\varphi^{(m)}(1) = 0$

2. Modelos

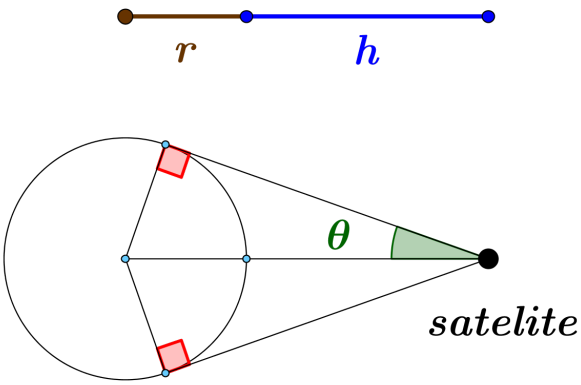
1. Si un gas en un cilindro se mantiene a temperatura constante T, la presión P se relaciona con el volumen V mediante la fórmula $P = \dfrac{nRT}{V-nb} + \dfrac{an^2}{V^2}$ donde a, b, n, R son constantes.

   Calcule $\frac{dP}{dV}$

2. Para el ejercicio 4 de la sección 6(Modelos) del Práctico 4. calcular F'.

   Fijas V y R_1 determianr la función G que asocia a cada R_1 el correspondiente I (recordar que la ley de Ohm determina $V = IR$). Calcular G'.

3. Cuando un satelite explorra la tierra, solo tiene acceso a una parte de la superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el angulo θ que se muestra en la siguiente figura

   donde r es el radio de la Tierra, h la distancia del satelite a la superficie terrestre, y θ el ángulo entre el segmento que une el satelite y el centro de la Tierra con el segemento tangente a la Tierra que pasa por el satelite.

   El radio de la Tierra es de 6371 km aproximadamente *a*) Calcular h para que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Sea F la función que asigna a cada h su correspondiente θ.
Calcular $\mathrm{Im}(F)$.
Probar que F es monotona.
Calcular $\lim_{h \to +\infty} F(h)$.

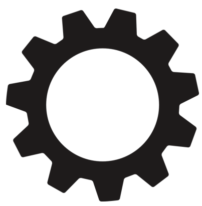
c) Calcular el ritmo θ en función de la distancia h, es decir F'.

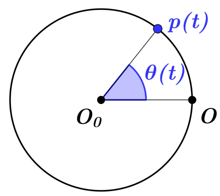
d) Los satelites de navegacion global, como el GPS, orbitan entre 2000 y 35786 km de altura. Determinar los angulos mínimos y máximos para estos h. Comparar com $\lim_{x \to +\infty} F(\theta)$.

e) Suponga ahora que se quiere obtener un angulo fijo $\theta_0 \in Im(F)$. Determine la función G que asigna a cada angulo θ su correspondiente h.
Calcular G y G'

4. En este ejercicio se intentara definir la velocidad de los engranajes. Para un engranaje lo importante es cuanto gira, y no la velocidad puntal en cada lugar del mismo.

   Suponga por ejemplo que para el engranaje de la figura (figura de la izquierda) se sabe que el gira a una velocidad constante y que el engrange tarda 12 segundos en dar una vuelta entera, cuanto tarda un diente para avanzar al siguiente lugar?

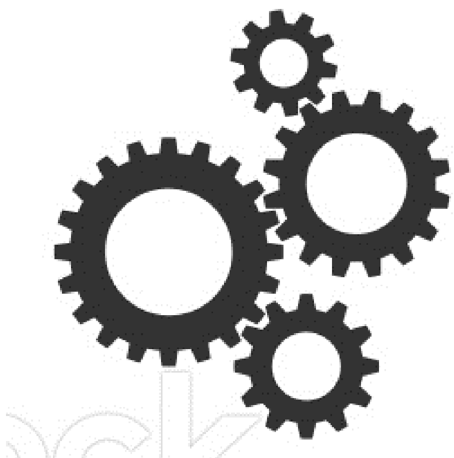




   Para definir la velocidad de un engranaje se marcan 2 puntos, O_0, el origen de la circunferencia, otro auxiliar O que servira para medir los ángulos. Estos dos puntos estan en el plano y se mantandran siempre en el mismo lugar. Se pinta un punto p en el engranaje (la circunferencia), este si se movera en función del tiempo, luego define una función $p(t)$. Por último definimos la función θ como $\theta(t)$ es el angulo que forman $O, O_0, p(t)$. Hay una pequeña ambiguedad en esta definición que pasaremos por alto.

   Definimos asi la velocidad del engranage como θ'

   Para la siguiente figura numeramos los engranages de forma descendente y notemos θ_i a una función de angulo para el engranaje i. Suponga que movemos voluntariamente el engrange 1. Determinar las velocidades θ_i' en relación a θ_1'

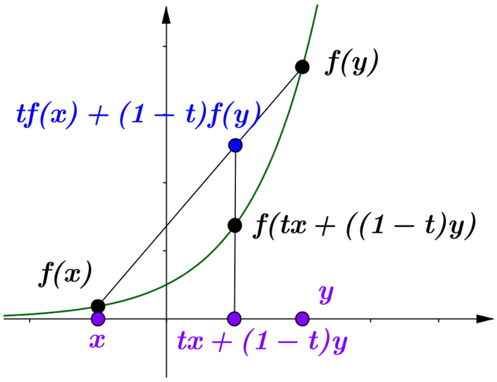


Suponga ahora un engranaje mueve una cinta horizontal. Relacionar la velocidad del engranaje con al de la cinta, cuidado no solo depende de θ'.

3. Ejercicios complementarios

1. Funciones convexas.

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, donde I es un intervalo o $\mathbb{R}$, decimos que f es convexa si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$ se cumple que $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. En otras palabras, dados dos puntos del grafico de f si se traza el segmento de recta por ellos, el gráfico de f nunca esta por arriba del él



   En este ejercicio $f : I \to \mathbb{R}$ sera convexa

   a) Sea J el intervalo definido por $J = \{y : -y \in I\}$, probar que la funcion $h : J \to \mathbb{R}$ definida por $h(y) = f(-y)$ es convexa

   b) Probar que en el caso de que f sea monótona creciente en I, dado $a \in I$ la función

   $$g_a(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x \leq a \\ f(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

   es convexa

   c) Probar que f es continua

   d) Probar que existen las derivadas laterales, esto es,

   $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

   .

   e) Dar ejemplos de funciones convexas monótonas y no monótonas

   f) Sea $J \subset I$ un intervalo cerrado, como f es continua tiene máximo en J, probar que el máximo de J se da en uno de los extremos de J.

2. Si f es tres veces derivable y $f'(x) \neq 0$ se define la derivada de Schwarz de f como

   $$\mathcal{D}f = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)$$

   a) Demostrar que $\mathcal{D}(f \circ g)(x) = \mathcal{D}f(g(x))(g')^2(x) + \mathcal{D}g(x)$

   b) Demostrar que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ tal que $ad - bc \neq 0$ entonces $\mathcal{D}f = 0$. En consecuencia $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$

3. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.

   En caso de ser derivable en 0, puede afrimar algo de $f'(0)$

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion par, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.

   En caso de ser derivable en 0, puede afrimar algo de $f'(0)$