

Práctico 1 - Inducción, número real

1. Inducción

1.1. Inducción básica

1. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el método de inducción completa:

$$a) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$c) \text{ (Suma de cuadrados de impares)} \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$d) \text{ (Desigualdad de Bernoulli)} (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$e) \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ para todo } x \neq 1$$

$$f) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$g) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \text{ para todo } n > 1$$

2. Probar sin usar inducción la fórmula $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

3. a) Sea b un entero positivo, entonces para cada $n \geq 0$ existen enteros no negativos Q y R tales que:

$$n = Qb + R, \quad 0 \leq R < b.$$

b) Sea $P \neq 0$ un polinomio de grado n entonces para cada polinomio S , existen polinomios Q y R tal que

$$S = PQ + R \quad \text{y} \quad \text{grado}(R) < n$$

c) Probar que en ambos casos Q y R son únicos bajo esas condiciones

4. Probar que la ecuación $\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n+2}{2}$ cumple el paso inductivo para todo n sin embargo no se cumple para ningún n

5. Calcular el conjunto de los n que cumple la desigualdad $n^2 \leq 2^n$.

1.2. Geometría

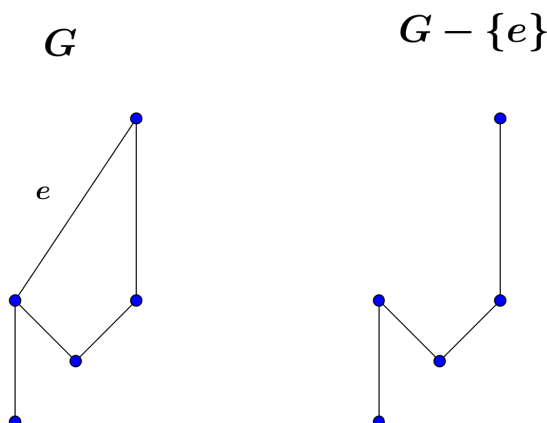
En esta sección no se esperan pruebas con formalidad excesiva en los ejercicios, sino que se entienda los problemas geométricos y a partir de inducción completa dar algún boceto de las demostraciones.

- Dado un segmento de longitud unidad, entonces el segmento de longitud \sqrt{n} se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n . (Sugerencia: ver como se construye el segmento de longitud $\sqrt{2}$.)
 - Probar que con regla y compás se pueden obtener todos los ángulos de la forma $\frac{\pi}{2^n}$
- Se tienen n circunferencias en el plano. Demostrar que se puede pintar las regiones delimitadas por las circunferencias con 2 colores, de forma que dos secciones adyacentes sean de color distinto. ¿Vale lo mismo para cuadrados?

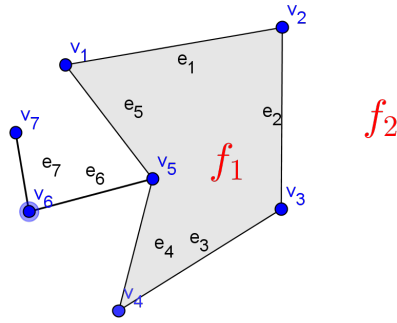
3. Grafos

Un grafo consiste en una cantidad finita de puntos en el plano (llamado vértices), y algunos de los vértices están conectados por curvas (llamadas aristas) las aristas siempre empiezan y terminan en dos vértices distintos y que dos aristas distintas no pueden compartir ambos vértices. Pedimos además que las aristas no se corten, es decir, que solo se pueden tocar en un vértice. Se puede dar una definición más general, a estos tipos de grafos se los llama planares. La notación común para los vértices es v, w y v_i mientras que para las aristas es e y e_i

- Decimos que un grafo es conexo si para cualquier par de vértices hay un camino que los conectan. es decir, para todo par de vértices distintos v y w existen un conjunto de vértices v_i $i \in \{0, \dots, k\}$ $v_0 = v$, $v_k = w$ y aristas e_j , $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que la arista e_j conecta los vértices v_{j-1} y v_j



- Probar que si un grafo de n vértices es conexo entonces tiene al menos $n - 1$ aristas
 - Probar que si un grafo conexo de n vértices tiene más de $n - 1$ aristas entonces se le puede quitar alguna de sus aristas de forma que siga siendo conexo. Deducir que si un grafo es conexo hay alguna forma de quitar aristas hasta que tenga $n - 1$ y que el grafo resultante sea conexo.
- Dado un grafo podemos definir las caras del grafo como las regiones encerradas por el dibujo del mismo. Generalmente se nota f y f_i a las caras.
Notamos la cantidad de caras como F , la cantidad de aristas como E y la cantidad de vértices como V .



$$V - E + F = 7 - 7 + 2 = 2$$

Figura 1: Delimitación de caras

Probar que $V - E + F = 2$. Sugerencia: discutir por componentes conexas.

1.3. Combinatoria y ordenes

1. TRIANGULO DE PASCAL

El triangulo de Pascal, es un triangulo de numeros, infinito y definido por inducción.

La primer fila contiene un unico numero, que sera 1, y luego cada fila tendra un elemento mas que la anterior.

Notaremos $f(n, i)$ el valor del lugar i de la fila n . Para que tenga sentido debe ser $i \leq n$.

La definicion entonces es.

- Paso base: $f(0, 0) = 1$
- Paso inductivo:
 - $f(n + 1, 0) = f(n + 1, n + 1) = 1$
 - Si $1 < i < n + 1$, $f(n + 1, i) = f(n, i) + f(n, i - 1)$

				1			
				1		1	
			1	2		1	
		1	3	3		1	
	1	4	6	4		1	

Las primeras 5 filas del triangulo de Pascal

a) Probar que

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} f(i, n)$$

b) Deducir que

- $\sum_{i=0}^n f(i, n) = 2^n$
- $\sum_{i=0}^n (-1)^i f(i, n) = 0$

$$\blacksquare f(i, n) = f(n - i, n)$$

c) Se define el numero combinatorio $\binom{n}{i}$, donde $0 \leq i \leq n$ como $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Recordar que $0! = 1$

Probar que

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i}$$

Deducir que $f(i, n) = \binom{n}{i}$

d) Suponga que tiene una bolsa con n bolillas distinguidas, por ejemplo numeradas del 1 al n . Probar que $f(i, n)$ es la cantidad de maneras de tomar i boillas de las n .

2. Se desea hacer un programa que busque una palabra en un diccionario, para esto se necesitan hacer comparaciones hasta encontrarla. Dotaremos de un orden a las palabras, de forma que dadas dos palabras P y Q se tiene que P es menor a Q si aparece antes en el diccionario

El proceso para comparar dos palabras es inductivo, Dadas dos palabras P y Q si la primer letra de P aparece antes en el abecedario que la primer letra de Q entonces decimos que P es menor a Q (aparece antes en el diccionario).

En caso de que la primer letra sea igual se comparan las segundas y asi inductivamente.

Si el proceso anterior no termino y llegamos a la ultima letra de alguna de las palabras, hay dos opciones o son la misma palabra o una palabras contiene mas letras que la otra. En este ultimo caso las palabra con mas letras es la mayor.

Ejemplos: Casa < Casas; Ave < Pez.

A este orden se le llama orden lexicografico.

En este problema asumiremos que comparar 2 palabras cualesquiera tiene costo 1.

Notemos n la cantidad de palabras del diccionario, P la palabra a buscar y $p(k)$ la funcion que indica el lugar del diccionario donde esta la palabra de la k -esima comparacion Un programador ofrece dos programas A y B para solucionar el problema.

- A)
- En el primer paso se compara con la palabra 1, es decir $p(1) = 1$, si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
 - En el paso k se compara con la k -esima palabra. Si es igual termina el programa sino compara con la siguiente.
- B)
- En el primer paso se compara con la palabra que esta en el lugar $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir $p(1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
 - Si en el paso $k - 1$ la comparacion dio que la palabra P es menor a la que esta en el lugar $p(k - 1)$ entonces $p(k) = \lfloor p(k - 1) - \frac{n}{2^k} \rfloor$. Si la comparacion dio que la palabra P es mayor entonces $p(k) = \lceil p(k - 1) + \frac{n}{2^k} \rceil$

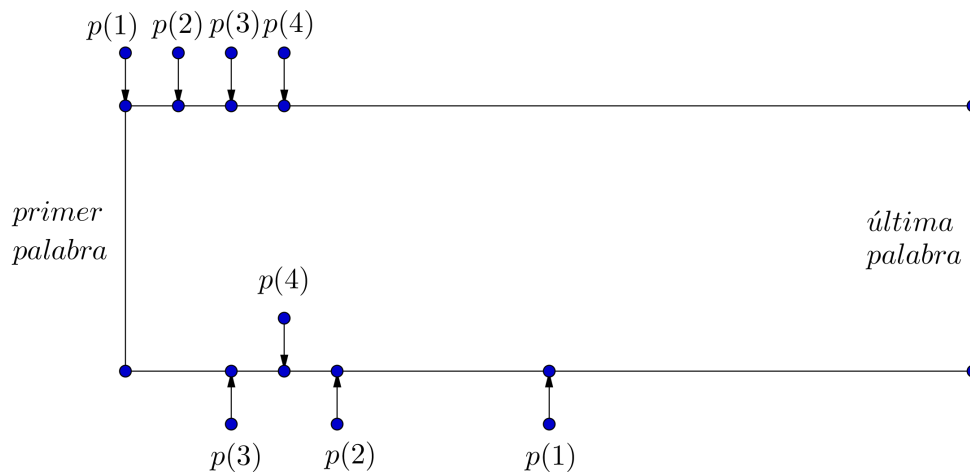


Figura 2: Iteraciones para encontrar la cuarta palabra en un diccionario de 17 palabras

- Acotar aproximadamente el costo mínimo y máximo en cada caso.
 - Discutir sobre cual metodo sera mas eficiente.
 - El diccionario de la RAE tiene aproximadamente 93111 palabras. Cual seria el costo en este caso.
 - En Uruguay hay 900.528 lineas de telefonia fija residencial (Informe Ursec 6/2015). Estimar el costo de ambos algoritmos.
3. Se tiene un conjunto A de n elementos con un orden pero que estan desordenados
 Como ejemplo puede pensar en lo siguiente. Se quiere ordenar un mazo de barajas españolas sin comodines. Cada carta esta determinada por su palo y su numero, por ejemplo (oro,2), (basto,10).
 Supongamos que se tiene el mazo desordenado y se quiere ordenar de la siguiente forma. Primero todas las de oro, despues todas las de copa, luego todas las de espada y por ultimo todas las de basto.
 Dar algoritmos para ordenarlos.

2. Número Real

- Demostrar que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ son irracionales. Sugerencia: para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, usar que todo entero es de la forma $3n$ o $3n + 1$ o $3n + 2$.
 ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?
- Si a es racional y b es irracional, ¿es $a + b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b son ambos irracionales?
 - Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?
 - ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional, pero a^4 racional?
 - ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales su suma y su producto?
- Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla, si por el contrario es falsa dar un contraejemplo.
 - $x < y \Rightarrow -x > -y$
 - $x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$
 - $x < y$ y $z < w \Rightarrow x + z < y + w$
 - $x < y$ y $z < w \Rightarrow xz < yw$

4. Sea $S \subset \mathbb{N}$ un subconjunto de los naturales no vacío y acotado superiormente. Probar que el supremo de S pertenece a \mathbb{N} . ¿Se puede afirmar si es o no máximo?
5. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.
6. Hallar supremos e ínfimos de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente:
 - a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \cos \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$
 - b) $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$
 - c) $C = \left\{ \frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 - d) $D = \{ \theta : \cos(\theta) = \sin(\theta) \}$; $E = \{ \cos(\theta) : \theta \in D \}$
 - e) $F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3x+1}{x-2} \leq 0 \right\}$

3. Ejercicios complementarios

1. Sea $P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polinomio entero es decir a_k es entero para todo k .
Probar que las raíces de P son enteras o irracionales. Probar además que todas las raíces enteras son divisores enteros de a_0 (el término independiente)
2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{ \alpha a : a \in A \}$ y $A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \}$.
 - a) 1) Si $A \subset B$ y B es acotado demostrar que $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
2) Dar un ejemplo donde $A \subset B$, B acotado e $\inf(B) = \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
 - b) 1) Si $a \leq b, \forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
2) Dar un ejemplo donde $a \leq b, \forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \inf(B)$.
 - c) 1) Probar que si A y B son acotados entonces $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ y $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2) Si $A = (0, 2]$ y $C = (0, 3]$, encontrar un conjunto B tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el ítem anterior.
 - d) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$.
2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ e $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.