Solución - Examen 21 de julio de 2016

Múltiple Opción

Respuestas

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones...

1	2	3	4	5
A	A	D	C	E

Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, el área encerrada...

1	2	3	4	5
A	D	B	C	D

Para cada $\lambda > 0$ la integral impropia...

1	2	3	4	5
E	C	A	A	B

Determinar el volumen máximo de un prisma...

1	2	3	4	5
E	A	E	B	C

Ejercicio 1

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que para todo n se cumple $0 < a_n \leq 1$, $b_n \geq 1$ y $b_n a_n \leq a_{n+1}$. Entonces necesariamente

A) $\{a_n\}$ converge a L tal que $0 < L \leq 1$.

B) $\{a_n b_n\}$ diverge a $+\infty$.

C) $\{a_n b_n\}$ converge al valor 0.

D) $\{a_n\}$ oscila.

E) $\{a_n\}$ converge al valor 0.

Solución: Podemos buscar contraejemplos para las opciones incorrectas: consideremos $a_n := a$, con $0 < a \leq 1$, y $b_n := 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente las sucesiones cumplen las hipótesis, pero no es cierto que $\{a_n\}$ oscile ni que tenga límite 0. A su vez, $a_n b_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que tampoco es cierto que $\{a_n b_n\}$ diverja ni que tenga límite 0.

Por ser $b_n \geq 1$ y $b_n a_n \leq a_{n+1}$, se tiene que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > b_n > 1$, luego, a_n es monótona creciente. Como a_n además está acotada superiormente, converge. Dado que $0 < a_n \leq 1$, es cierto que su límite L tiene que cumplir que $0 < L \leq 1$.

Ejercicio 2

Determinar el volumen máximo de un prisma de base cuadrada que se puede colocar dentro de una esfera de radio 1.

A) $\frac{8}{\sqrt{27}}$

B) $\frac{\sqrt[3]{24\pi}}{3}$

C) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

E) $\frac{\sqrt[3]{4\pi}}{3}$

(Sugerencia: Observar que la diagonal del prisma es el diámetro de la esfera. Relacionarla con la altura y la diagonal de la base.)

Solución:

La diagonal del prisma coincide con el diámetro de la esfera, por lo tanto vale 2. Denotemos l a la longitud del lado de la base del prisma, y h a su altura. Aplicando teorema de Pitágoras tenemos que para un prisma de base cuadrada inscripto en una esfera se cumple que:

$$l^2 + l^2 + h^2 = 2^2$$

y en consecuencia $h = \sqrt{4 - 2l^2}$.

El volumen del prisma viene dado entonces por

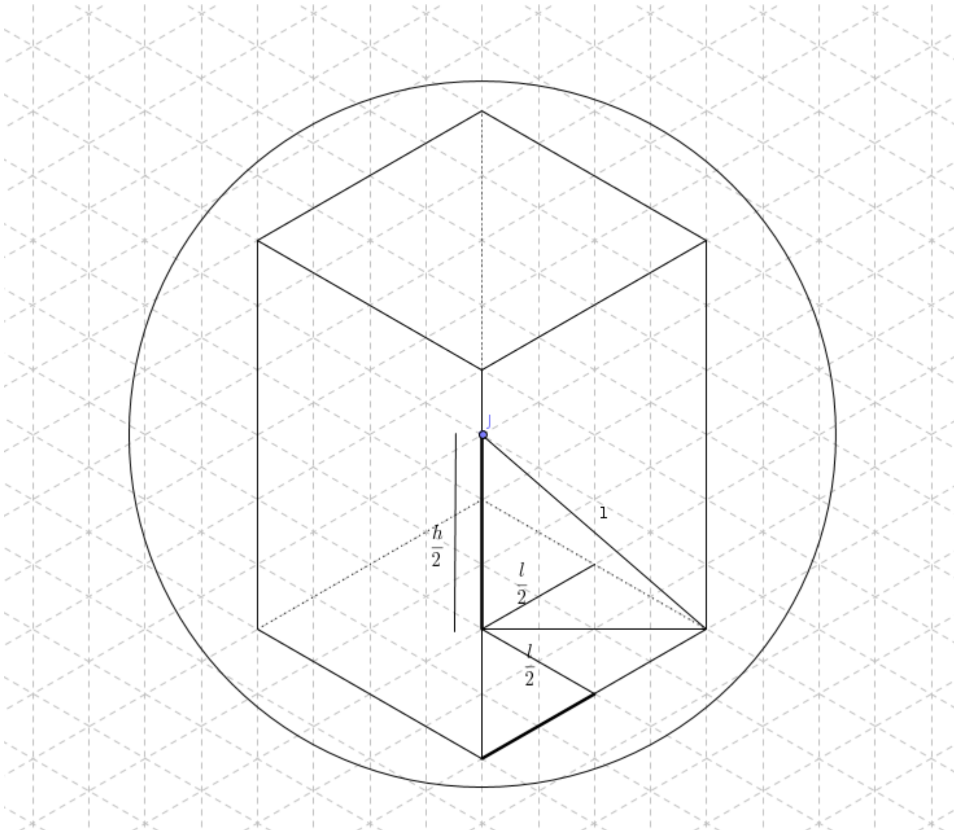
$$f(l) = l^2 h = l^2 \sqrt{4 - 2l^2}$$

Queremos hallar $\max\{f(l) : l \in [0, \sqrt{2}]\}$ que existe por ser f continua. Como f es derivable, nuestros candidatos a extremos son los ceros de la derivada y los extremos del intervalo $[0, \sqrt{2}]$.

Derivando respecto de l obtenemos

$$f'(l) = -\frac{2\,l^3}{\sqrt{-2\,l^2 + 4}} + 2\,\sqrt{-2\,l^2 + 4}l$$

Las soluciones no negativas de $f'(l) = 0$ son 0 y $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Evaluando f en todos los candidatos obtenemos que el máximo se alcanza en $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, y la solución es $\frac{8}{\sqrt{27}}$.



Ejercicio 3

Sean $T = \{z \in \mathbb{C} : z^8 = 1\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = -Im(z)\}$. Entonces el cardinal (cantidad de elementos) de $S \cap T$ es:

A) 1

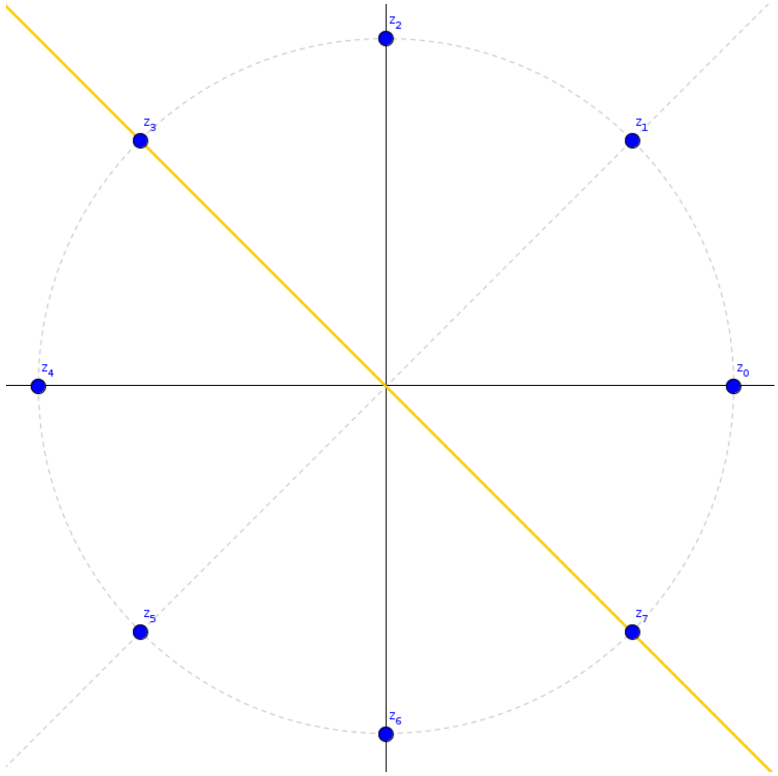
B) 0

C) 4

D) 2

E) 3

Solución:
Es posible resolver el problema geométricamente, sin operar, conociendo el comportamiento de las raices de la unidad.
El conjunto T, que denota las raices octavas de la unidad, gráficamente es un octágono regular con centro en el origen y un vértice en la unidad.
El conjunto S, viene dado por la recta por el origen de pendiente -1, y pasa por exáctamente dos de los vértices:



Siendo formales:

$$T = \{z \in \mathbb{C} : z^8 = 1\} = \{e^{ik\frac{\pi}{4}} : 0 \leq k \leq 7\}$$

$$S = \{\rho e^{i\theta} : \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \rho > 0\}$$

De los 8 elementos de T, hay 2, que son $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ y $e^{i\frac{7\pi}{4}}$ que cumplen lo anterior.
El cardinal buscado es 2.

Ejercicio 4

Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, el área encerrada entre la parábola definida por $f(x) = -ax^2 + 1$ y la parábola definida por $g(x) = a^2x^2 - 1$ es:

A) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} (-ax^2 + 1)dx - \int_{-1/a}^{1/a} (a^2x^2 - 1)dx.$

B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-(a^2 + a)x^2 + 2)dx.$

C) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (-(a^2 + a)x^2 + 2)dx.$

D) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} (-ax^2 + 1)dx + \int_{-1/a}^{1/a} (a^2x^2 - 1)dx.$

E) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (a^2 - a)x^2 dx.$

Solución:
Los extremos de integración se dan cuando $-ax^2+1=a^2x^2-1$. Resolviendo la ecuación en x obtenemos $x=\pm\sqrt{2/(a^2+a)}$

Tenemos que calcular entonces $\displaystyle\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} |f(x)-g(x)|dx$

Como entre los puntos calculados las funciones no se intersectan (son los únicos puntos de intersección entre ellas, y las mismas continuas), $f(x)-g(x)$ conserva el signo. Basta chequear con un punto (por ejemplo la ordenada en el origen) para deducir que $f(x)-g(x)\geq 0$ en el intervalo dado.
Por tanto:

$$\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} |f(x)-g(x)|\,dx = \int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (f(x)-g(x))\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} ((-ax^2+1)-(a^2x^2-1))\,dx = \int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (-(a^2+a)x^2+2)\,dx$$

Ejercicio 5

Para cada $\lambda>0$ la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda}{x(x+\lambda)}dx$:

A) Diverge a $+\infty$ $\forall\lambda>0$.

B) Diverge a $+\infty$ si y sólo si $\lambda>1$.

C) Converge si y sólo si $\lambda>1$.

D) Converge si y sólo si $\lambda>\frac{1}{2}$.

E) Converge $\forall\lambda>0$.

Solución:
Como λ es constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda}{x(x+\lambda)}dx=\lambda\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+\lambda x}dx$.
Observar que por ser $\lambda>0$ la integral planteada es impropia de primera especie. Luego, tenemos que

$$\frac{1}{x^2+\lambda x}\sim\frac{1}{x^2} \text{ para } x\to\infty$$

y por el criterio del equivalente la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+\lambda x}dx$ $\forall\lambda>0$.
Otra forma de resolver éste ejercicio es hallando la primitiva de $\dfrac{\lambda}{x(x+\lambda)}$ por fracciones simples, y ver que el límite cuando $x\to\infty$ es finito.

Desarrollo

60 puntos

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

1) (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Definir partición de $[a, b]$, suma superior e inferior de f y función integrable en $[a, b]$.

   (b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Demostrar que f es integrable en $[a, b]$ sii $\forall \epsilon > 0$ existe una partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

   (c) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$ tal que $\forall x \in (a, b]$ f es integrable en $[x, b]$. Probar que f es integrable en $[a, b]$.

   (d) Dar un ejemplo de una función acotada no integrable. Justifique.

2) (a) Enunciar el Teorema de Taylor.

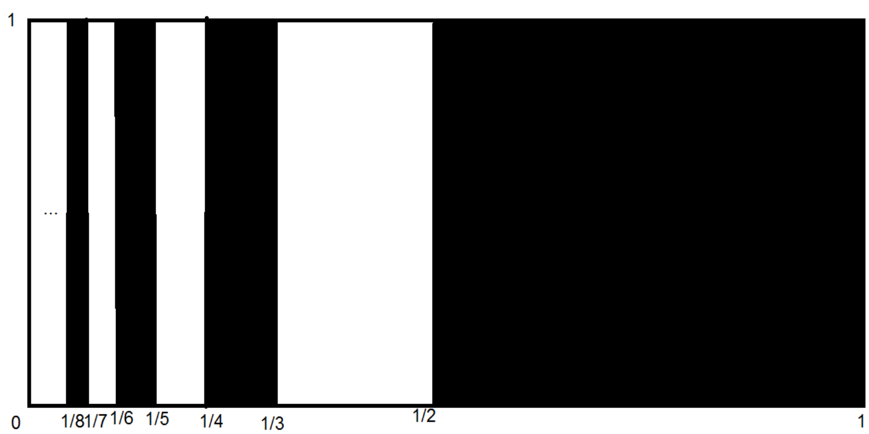
   (b) Calcular el desarrollo de Taylor de orden n de $\log(1 + x)$ en $x = 0$.

   (c) Enunciar el Teorema del Resto de Lagrange.

   (d) Probar que $P_n(\log(1 + x), 0)(x)$ converge a $\log(1 + x)$ para todo x tal que $0 < x \leq 1$.

   (e) La siguiente figura representa el comienzo de un procedimiento que pinta rectángulos. Expresar el área pintada de negro como una serie.

   (f) Calcular el área pintada de negro al finalizar el procedimiento.



Solución:

1) a) Ver teórico páginas 85 y 86, definiciones 200, 201 y 203.

   b) Si f es integrable en $[a, b]$, $sup\{s(f, P)\} = inf\{S(f, P)\}$ por definición. Por lo tanto, por propiedad de supremo/ínfimo existen particiones P y P' tales que

$$S(f, P) - \int_a^b f(t)dt < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\int_a^b f(t)dt - s(f, P') < \frac{\epsilon}{2}$$

Por tanto, sumando miembro a miembro $S(f,P) - s(f,P') < \epsilon$ (*)
Consideramos la partición $Q = P \cup P'$. Como Q es un refinamiento de P y de P', se cumple que

$$S(f,Q) \leq S(f,P)$$

$$s(f,P') \leq s(f,Q)$$

De donde, sumando miembro a miembro y reordenando

$$S(f,Q) - s(f,Q) \leq S(f,P) - s(f,P')$$

Por lo tanto, por (*) y la transitividad, se tiene que $S(f,Q) - s(f,Q) < \epsilon$ (encontramos una partición Q como queríamos).
Para demostrar el recíproco, necesitamos ver que si $\forall \epsilon > 0$ existe P con $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$ entonces $sup\{s(f,P)\} = inf\{S(f,P)\}$. Supongamos lo contrario. Como siempre $sup\{s(f,P)\} \leq inf\{S(f,P)\}$, para este caso $inf\{S(f,P)\} - sup\{s(f,P)\} = \epsilon_0 > 0$ A su vez para cualquier partición P

$$S(f,P) \geq inf\{S(f,P)\}$$

$$\sup\{s(f,P)\} \geq s(f,P)$$

De donde, sumando miembro a miembro y reordenando:

$$S(f,P) - s(f,P) \geq inf\{S(f,P)\} - \sup\{s(f,P)\}$$

Pero entonces para toda partición P se cumple que $S(f,P) - s(f,P) > \epsilon_0$, absurdo.

c) Utilizando el resultado de la parte anterior probaremos que para $\epsilon > 0$ cualquiera existe una partición P tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
Consideremos $\epsilon > 0$, por ser f acotada tenemos que existe K tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$.
Sea $x = a + \frac{\epsilon}{4K}$, tenemos que f es integrable en $[x,b]$, luego, por la parte anterior, existe Q partición de $[x,b]$ que cumple que $S(f,Q) - s(f,Q) < \frac{\epsilon}{2}$.
Tomando $P = \{a\} \cup Q$ se obtiene que

$$S(f,P) - s(f,P) < 2K\frac{\epsilon}{4K} + S(f,Q) - s(f,Q) < 2K\frac{\epsilon}{4K} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

d) La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es acotada pero para toda partición P del intervalo se cumple que $S(f,P) = 1$ y $s(f,P) = 0$, luego, falla la condición necesaria y suficiente de integrabilidad tomando $\epsilon < 1$ y en consecuencia f no es integrable.

2) a) Ver teórico página 78, teorema 28.

b) Puede probarse por inducción que

$$\frac{\partial^n \log(1+x)}{\partial x^n} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

y por tanto:

$$\log(1+x)^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P_n(\log(1+x),0)(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(1+x)^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

c) Ver teórico página 80, teorema 29.

d) Sea $r_n(x) = \log(1+x) - P_n(\log(1+x), 0)$ el resto del desarrollo de Taylor de orden n en 0. Probaremos que $|r_n(x)|$ converge a 0.
Sabemos que

$$|r_n(x)| = |\log(1+x) - P_n(\log(1+x), 0)|$$

Aplicando el teorema anterior

$$r_n(x) = \frac{\log(1+x)^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si sustituimos por la expresión hallada para la derivada obtenemos:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!(1+c)^{-n-1}x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{x^{n+1}}{n(1+c)^{n+1}}$$

Como $0 \leq c \leq x \leq 1$,se tiene que $\frac{x}{1+c} \leq 1$ por lo que la sucesión de los restos converge a 0, ya que $\frac{x^{n+1}}{n(1+c)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$ y la última es una sucesión geométrica con $\lambda < 1$. Entonces como $r_n(x)$ converge a 0, $P_n(\log(1+x), 0)$ converge a $\log(1+x)$ como queríamos.

e) $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ...$

El área total en el paso n viene dada por $A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i}\right) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = P_{2n}(\log(1+x), 0)(1)$

Por lo tanto, el área total viene dada por la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i}\right)$

f) El área al final del procedimiento es $\lim_{n\to\infty} A_n$, que por las partes anteriores vale $\log(1+1) = \log(2)$