Solución parcial 2 de julio de 2016

Múltiple Opción

Respuestas

La integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$...

1	2	3	4	5	6
D	E	A	E	B	A

Sean $f : f(x) = xe^{x^2}$ y $g : g(x) = e(2-x)$...

1	2	3	4	5	6
B	C	D	E	A	C

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con $g(4) = g'(4) = \frac{1}{2}$...

1	2	3	4	5	6
A	D	B	E	D	E

Sean f, g funciones continuas no negativas en $[a, b]$...

1	2	3	4	5	6
B	C	A	C	C	B

Ejercicio 1

La integral impropia

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2+x-2}\,dx$$

tiene el siguiente comportamiento:

A) Diverge.

B) Converge a $\frac{3}{2}$.

C) Converge a $\frac{1}{2}$.

D) Converge a $\log 4$.

E) Converge a $\log 8$.

Solución:

Como $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, aplicando el método de fracciones simples se obtiene $\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$, por lo tanto

$$\int_2^T \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int_2^T \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^T \frac{1}{x+2}\,dx = \log\left|\frac{T-1}{T+2}\right| - \log\left|\frac{2-1}{2+2}\right|$$

Tomando límite $\lim_{T\to+\infty} \log\left|\frac{T-1}{T+2}\right| - \log\left|\frac{2-1}{2+2}\right|$, se llega a que la integral impropia converge a $\log 4$.

La solución es la opción D.

Ejercicio 2

Sean f, g funciones continuas no negativas en $[a,b]$. El volumen de revolución del sólido generado por la región comprendida entre las rectas $x=a$, $x=b$ y ambas gráficas al girar en torno al eje $\vec{ox}$ vale:

A) $\pi\displaystyle\int_a^b (f-g)^2$

B) $\pi\displaystyle\int_a^b (f^2-g^2)$

C) $\pi\displaystyle\int_a^b |f-g|$

D) $\pi\displaystyle\int_a^b (f-g)$

E) $\pi\displaystyle\int_a^b |f^2-g^2|$

Solución: Sabemos que el volumen de revolución del sólido generado por la región comprendida entre las rectas $x=a$, $x=b$, el gráfico de f y el eje $\vec{ox}$ al girar en torno del eje $\vec{ox}$ es $\pi\int_a^b f^2$ y análogamente para g. El volumen se obtiene integrando $\pi(g^2-f^2)$ donde $f(x)\le g(x)$, e integrando $\pi(f^2-g^2)$ donde $g(x)\le f(x)$. Entonces, el volumen se obtiene integrando $\pi|f^2-g^2|$. Es decir, el volumen resulta $\pi\displaystyle\int_a^b |f^2-g^2|$.

La solución es la opción E.

Ejercicio 3

Sean $f: f(x)=xe^{x^2}$ y $g: g(x)=e(2-x)$. Entonces el área de la región encerrada por ambas gráficas y las rectas $x=0$, $x=2$ vale:

A) $\frac{e^4+1}{2}$

B) $e^4+\frac{1}{2}$.

C) $2e-\frac{e^4-1}{2}$

D) $\frac{e^4-1}{2}-2e$.

E) 0

($Sug.$: $Considere$ $x = 1$)

Solución:
Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces $h(1) = 0$ y $h'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} + e > 0$, por lo tanto h es estrictamente creciente en $[0, 2]$ y su raíz es única. Como $h(0) = -2e$ y $h(2) = 2e^4$ por continuidad se deduce que h es negativa en $[0, 1]$ y positiva en $[1, 2]$. Esto implica que $f(x) \leq g(x)$ en $[0, 1]$ y $g(x) \leq f(x)$ en $[1, 2]$.

Por lo tanto, el área de la región encerrada es $\int_0^1 (g - f) + \int_1^2 (f - g)$. Una primitiva de f es $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$, una primitiva de g es $G(x) = e(2x - \frac{x^2}{2})$, evaluando las integrales con la regla de Barrow, se llega a que el área de la región encerrada es $\frac{e^4+1}{2}$.

La solución es la opción A.

Ejercicio 4

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con $g(4) = g'(4) = \frac{1}{2}$, y $F(x) = \int_4^{x^2} g(t)\, dt$. Entonces el polinomio de Taylor de $F(x)$ en $x = 2$ de orden 2 es:

A) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{2}(x - 2)^2$

B) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2$

C) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2} + 2(x - 2) + \frac{1}{2}(x - 2)^2$

D) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{9}{2}(x - 2)^2$

E) $P_2(F, 2)(x) = 2(x - 2) + \frac{9}{2}(x - 2)^2$

Solución:
$F(2) = \int_4^{2^2} g(t)\, dt = 0$, por la regla de la cadena, $F'(x) = g(x^2)2x$ por lo que $F'(2) = g(4) \cdot 4 = 2$. Finalmente $F''(x) = 4x^2g'(x^2) + 2g(x^2)$ y $F''(2) = 4 \cdot 4 \cdot g'(4) + 2g(4) = 9$.

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de F de orden 2 en $x = 2$ es $P_2(F, 2)(x) = 2(x - 2) + \frac{9}{2!}(x - 2)^2$
La solución es la opción D.

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R} \to R$ definida por $f(x) = \sin(x)(x^2 - x)$. Entonces, la derivada de orden 1000 de f en 0 es:

A) $f^{(1000)}(0) = -\frac{1000!}{2003!}$

B) $f^{(1000)}(0) = 1000$

C) $f^{(1000)}(0) = 0$

D) $f^{(1000)}(0) = -1000!$

E) $f^{(1000)}(0) = 1$

($Sug.$: *Considere el desarrollo de Taylor de* $f(x)$ *para un orden y punto convenientes*)

Solución: El polinomio de Taylor del producto de dos funciones, es el producto de los polinomios de Taylor de ambas pero eliminando los términos que queden con orden mayor al grado del polinomio buscado. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 1000 de f en $x = 0$ es

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{499}\frac{x^{999}}{999!}\right)(x^2 - x)$$

Cuyo coeficiente en x^{1000} es $\frac{1}{999!}$, se tiene entonces que $\frac{f^{(1000)}(0)}{1000!} = \frac{1}{999!}$ y por lo tanto $f^{(1000)}(0) = 1000$.
La solución es la opción B.

Ejercicio 6

Sea (a_n) una sucesión de números positivos tal que $\sum a_n$ converge. Entonces necesariamente:

A) $\sum a_n^2$ converge.

B) $\sum \sqrt{a_n}$ converge.

C) $\sum \frac{1}{a_n}$ converge.

D) $\sum (1 + a_n)$ converge.

E) $\sum e^{a_n}$ converge.

Solución: Como $\sum a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, por lo tanto las series $\sum \frac{1}{a_n}$, $\sum(1 + a_n)$ y $\sum e^{a_n}$ no convergen porque su término general no tiende a 0. Si $a_n = \frac{1}{n^2}$ entonces $\sum a_n$ converge pero $\sqrt{a_n} = \frac{1}{n}$ y $\sum \sqrt{a_n}$ no converge. Por último probemos que necesariamente $\sum a_n^2$ converge.

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ $\exists n_0$ tal que $a_n < 1$ $\forall n \geq n_0$, por lo tanto, $a_n^2 < a_n$ $\forall n \geq n_0$, como (a_n) y (a_n^2) son de términos positivos, el criterio de comparación permite concluir que $\sum a_n^2$ converge.

La solución es la opción A.

Desarrollo

36 puntos.

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

1) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua y positiva en $[0, 2]$ y $\int_0^2 f(t)\, dt = 6$.

   a) Probar que existe al menos un $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 3$. Enuncie y demuestre el teorema que le permite probar lo anterior.

   b) Supongamos además que $g : [0, 2] \to R$ es una función acotada con máximo M y mínimo m. Probar que

$$6m \leq \int_0^2 f(t)g(t)\, dt \leq 6M$$

   c) Deducir que $6 \leq \int_0^2 (3t^2 - 1)e^t\, dt \leq 6e^2$.

2) a) Sea f continua en un intervalo abierto I, $a \in I$, y se considera $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ para $x \in I$. Enuncie y demuestre el Teorema Fundamental del Cálculo.

   b) Sea $F : [\frac{1}{2}, +\infty) \to R$ siendo $F(x) = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt \right) - \frac{\sqrt{x}}{e}$. Analice extremos y crecimiento de F.

   c) Hallar $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Solución:

1) a) Por el teorema del valor medio para integrales, $\exists c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(t) = 3$. Para el enunciado del teorema y la prueba, ver teórico página 92, Teorema 32.

   b) Como $m \leq g(x) \leq M$ y $f(x) \geq 0$, se tiene que $mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x)$. Por la monotonía de la integral, se deduce que $m \int_0^2 f(x)\, dx \leq \int_0^2 f(x)g(x)\, dx \leq M \int_0^2 f(x)\, dx$, usando que $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$ se prueba la desigualdad pedida.

   c) Esta desigualdad no se puede deducir de las partes anteriores porque $g(t) = 3t^2 - 1$ no es positiva en $[0, 2]$, sin embargo la integral puede resolverse aplicando partes dos veces y deducir de ahí la desigualdad.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (3t^2 - 1)e^t\, dt &= (3t^2 - 1)e^t|_0^2 - \int_0^2 6te^t\, dt \\
&= 11e^2 + 1 - 6 \left(te^t|_0^2 - \int_0^2 e^t\, dt \right) \\
&= 11e^2 + 1 - 6 \left(2e^2 - e^2 + 1 \right) \\
&= 5e^2 - 5
\end{aligned}$$

   Se verifica que $6 \leq 5e^2 - 5 \leq 6e^2$.

2) a) Ver teórico página 93, Teorema 33.

   b) Usando la regla de la cadena, se tiene que $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x^2} - \frac{1}{2e\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{-x} - e^{-1})$. Luego $F'(x) = 0 \iff x = 1$. Estudiando el signo de la derivada, se obtiene que F es creciente en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ y decreciente en $[1, +\infty)$, por lo tanto F presenta un máximo relativo en $x = 1$.

   c) Como $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ es una integral impropia convergente y $\sqrt{x} \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, se tiene que $\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt$ existe y es finito. Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt \right) - \frac{\sqrt{x}}{e} = -\infty$.