Resolución del segundo parcial de cálculo 1
4/7/2015

Ejercicios de M.O.

Ejercicio de Función inversa
Opción correcta: Las tres afirmaciones son verdaderas.
Justificación: La última afirmación se prueba utilizando el Teorema fundamental del cálculo ya que $log(sen^2(t)+2)$ es continua en $\mathbb{R}$.
Para probar la primera afirmación vemos que, utilizando nuevamente el Teorema fundamental del cálculo, g es derivable y, como $sen^2(x)+2>1$, $g'(x)=log(sen^2(x)+2)>0$ en $\mathbb{R}$ por lo cual g resulta invertible.
Para la segunda afirmación sabemos que g es invertible en 0 y $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{log(2)}$.

Ejercicio de cálculo de integrales
Opción correcta: $\frac{2}{3}$.
Justificación:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^3dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-(\text{sen}x)^2\right)\cos x dx.$$

Haciendo la sustitución $u=\text{sen}x$, esto es igual a

$$\int_0^1(1-u^2)du=\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1=1-\frac{1^3}{3}-0+\frac{0^3}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ejercicio de Desarrollo de Taylor
Opción correcta: $\frac{1}{6}$.
Justificación: El polinomio de Taylor de grado 2 en $x=0$ de $e^{2x}-1-2x\cos x$ es $2x^2$.
Además, cuando $x\to 0$, $12x^2+x^3\sim 12x^2$.
Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x\cos x}{12x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{12x^2}=\frac{1}{6}$$

Ejercicio de aplicaciones de integrales
Opción correcta:$\frac{2}{3}$.
Justificación: Observemos que $\int_0^1 |1-x^2|dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Ejercicio de definición de integral
Opción correcta: 0.
Justificación: El límite propuesto vale $\int_{-1}^1 x^3 = 0$. Para ver esto, notar que para cada n se tiene la suma inferior para la función x^3 y la partición $P_n = \{-1 + \frac{2i}{n} : i = 0, \dots, n\}$ del intervalo $[-1,1]$. Para concluir basta notar que $||P_n|| = 2/n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$.

Ejercicio de integrales impropias
Opción correcta:$-\frac{1}{4}\log(\frac{1}{2})$.
Justificación: Utilizando el cambio de variable $u = x^2 + x, du = (2x+1)dx$ tenemos que

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2-4}dx = \int \frac{1}{u^2-4}du = \int \left(\frac{1}{4(u-2)} - \frac{1}{4(u+2)}\right) du$$

$$= \int \frac{1}{4(u-2)}du - \int \frac{1}{4(u+2)}du = \frac{1}{4}(\log|u-2| - \log|u+2|) + K$$

$$= \frac{1}{4}(\log|x^2+x-2| - \log|x^2+x+2|) + K.$$

Luego, $\int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x)^2-4}dx = lim_{t\rightarrow+\infty} \int_2^t \frac{2x+1}{(x^2+x)^2-4}dx$. Utilizando la primitiva hallada para $K = 0$ obtenemos que lo anterior es igual a $lim_{t\rightarrow+\infty}\frac{1}{4}(\log|x^2+x-2| - \log|x^2+x+2|)|_2^t = -\frac{1}{4}\log(\frac{1}{2})$. Este ejercicio también se puede hacer aplicando fracciones simples directamente.

versión 1

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \int_0^x log(sen^2(t) + 1)dt$...

1	2	3	4	5	6
E	B	E	A	E	D

versión 2

Calcular: $\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{i=0}^{n-1}(-1 + \frac{2i}{n})^3 \frac{2}{n}$ ...

1	2	3	4	5	6
B	A	A	C	E	A

versión 3

El valor de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx)^3 dxes$...

1	2	3	4	5	6
A	C	C	E	B	C

versión 4

El área encerrada entre la recta $y = 1$ y el gráfico de la función $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$...

1	2	3	4	5	6
A	A	C	A	D	E

Desarrollo

Ejercicio 1. (1) Ver teórico, definición 201, pág 85.

(2) Ver teórico, definición 203, pág 86.

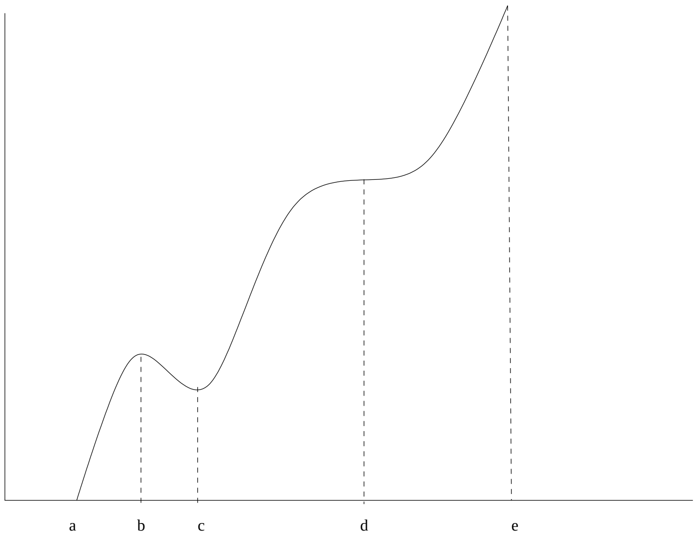
(3) Ver teórico, definición 257, pág 115.

(4) Para clasificar la integral observemos que $\frac{1}{e^x+e^{-x}} \geq 0$ y por lo tanto podemos utilizar el criterio de comparación. Como $\lim_{t\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, existe x_0 tal que para todo $x > x_0$ se cumple que $\frac{1}{e^x+e^{-x}} \leq \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x^2}$, lo que implica que la integral impropia converge. Para calcular dicha integral, utilizando la definición de la parte anterior, tenemos que:
$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.
Relizando el cambio de variable $u = e^x$ obtenemos que lo anterior es igual a:
$\lim_{t\to+\infty} \int_1^{e^t} \frac{du}{u^2+1} = \lim_{t\to+\infty} Arctg(u)|_1^{e^t} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Calculando directamente la integral también se puede clasificar la integral como convergente.

Ejercicio 2. (1) Para hallar el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 calculamos $F(0) = \int_0^0 \frac{\log(t+1)dt}{t+1} = 0$.
Luego, utilizando el teorema fundamental del cálculo, $F'(x) = 2\frac{\log(2x+1)}{2x+1}$, y evaluando en $x = 0$ obtenemos que $F'(0) = 0$. Por último $F''(x) = 2\frac{(\frac{2}{2x+1})(2x+1)-2\log(2x+1)}{(2x+1)^2}$ y evaluando en $x = 0$ $F''(0) = 4$. Concluimos que el polinomio de Taylor de F de orden 2 en $x = 0$ queda $2x^2$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2-x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2-x^4} = 2$.

Ejercicio 3. En primer lugar $F(a) = 0$. Además, utilizando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F'(x) = f(x)$ por lo tanto el signo de $f(x)$ se va a corresponder con el crecimiento o decrecimiento de $F(x)$. En particular, las raíces de f serán puntos críticos de F. Teniendo en cuenta lo anterior F toma un máximo reativo en b, un mínimo relativo en c y un punto crítico de inflexión en d.



Ejercicio 4. (1) Ver teórico Teorema 23 pág 72.

(2) La longitud del segmento determinado por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, utilizando el teorema de Pitágoras , se calcula como $\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1} - f(x_i))^2}$. Si sumamos las longitudes de todos los segmentos obtenemos el resultado buscado.

(3) $\Sigma_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1} - f(x_i))^2} = \Sigma_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 (1 + \frac{(f(x_{i+1} - f(x_i))^2}{(x_{i+1} - x_i)^2})} = \Sigma_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \frac{(f(x_{i+1} - f(x_i))^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}}$. Por último, utilizando el teorema del valor medio de Lagrange, sabemos que existe $z_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f'(z_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$.

(4) Observemos que L_P es una suma de Riemann de la función $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ en el intervalo $[a, b]$.

(5) La ecuación de la circunferencia de centro 0 y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$. Si consideramos la función $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y calculamos la longitud de dicha curva obtendremos la longuitud de media circunferencia. Por lo tanto, la longuitud de la circunferencia será:
$2 \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}})^2} dx = 2 \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} = 2r.arcsen(\frac{x}{r})|_{-r}^{r} = 2r\pi$.