Resolución del primer parcial de cálculo 1
6/5/2015

Ejercicios de M.O.

Soluciones M.O.

Ejercicio de Axioma de completitud
Opción correcta:$\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ tal que $\exists K \in \mathbb{R} : a \leq K\ \forall a \in A \Rightarrow \exists s = supA$.
Justificación. Ver teórico pág 12.
Ejercicio de números complejos
Opción correcta: $e^{i\frac{9\pi}{16}}$.
Justificación. Sabemos que $w^4 = cos(\frac{\pi}{4}) + i\ sin(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{i\pi}{4}}$.
Si $w = \rho e^{i\theta}$, la ecuación se transforma en: $(\rho e^{i\theta})^4 = \rho^4 e^{4i\theta} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, de donde $\rho^4 = 1$ y $4\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Los valores posibles de w entonces son $e^{i\frac{\pi}{16}}$, $e^{i\frac{9\pi}{16}}$, $e^{i\frac{17\pi}{16}}$, $e^{i\frac{25\pi}{16}}$.
El único que satisface la otra restricción ($Re(w) < 0$, $Im(w) > 0$) es $e^{i\frac{9\pi}{16}}$.
Ejercicio de series
Opción correcta: Las tres series son convergentes.
Justificación.

(I) Para clasificar esta serie aplicamos el criterio del cociente: $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \to 0$$

Por lo tanto, la serie es convergente.
ATENCION *** COMO HABIA LUGAR A CONFUSION ENTRE $(2^n)^2$ y $2^{(n^2)}$ Y APLICANDO EL MISMO CRITERIO DABA DIVERGENTE EN EL CASO $(2^n)^2$, TAMBIEN DAREMOS COMO CORRECTA LA OPCION: Las series (II) y (III) son convergentes pero la (I) no. ***

(II) Aplicamos el criterio de Leibniz:
$\frac{1}{\sqrt{n}}$ es decreciente y $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Por lo tanto la serie alternada converge.

(III)
$$e^{2-n} = e^2 \cdot \frac{1}{e^n}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$ converge pues es una serie geomtrica con $|q| = \frac{1}{e} < 1$. Luego, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^2 \cdot \frac{1}{e^n}$ converge.

Ejercicio de continuidad

Opción correcta: Todas las afirmaciones son correctas.

Justificación. Todas las afirmaciones son formas equivalentes de decir que una función es continua en el punto a. Las afirmaciones I), II) y IV) se encuentran en la pág 64. Para ver que III) es equivalente con IV) basta considerar el cambio de variable $x = a + h$. Al ser todo $\mathbb{R}$ el dominio de la función no es necesario pedirle a a que sea punto de acumulación para definir el límite ni pedirle a la sucesión que este en el dominio de la función.

Ejercicio de derivabilidad

Opción correcta: Solamente r es derivable en $x = 0$.

Justificación. Utilizamos la definición de derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Este límite no existe pues los límites laterales son distintos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Por lo tanto f no es derivable en $x = 0$.

Por otro lado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Este límite ya vimos que no existe. Por lo tanto g no es derivable en $x = 0$.

Por último,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2|h|}{h} = \lim_{h\to 0} h|h| = 0.$$

Por lo tanto r es derivable en $x = 0$.

versión 1

El axioma de completitud establece que:...

1	2	3	4	5
A	A	C	E	C

versión 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto $a \in \mathbb{R}$...

1	2	3	4	5
A	A	D	B	D

versión 3

Sea $\omega \in \mathbb{C}$, que satisface la ecuación...

1	2	3	4	5
B	D	C	C	D

versión 4

Se consideran las funciones $f(x) = |x|$...

1	2	3	4	5
B	B	A	E	A

Desarrollo

Ejercicio 1.

1. Ver teórico, pág 34.
2. Ver teórico, Teorema 1, pág 36.
3. Ver teórico, pág 47.
4. Consideramos la sucesión $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, al ser $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluimos que s_n es monótona creciente. Utilizando el Teorema 1 de la parte 2. podemos asegurar que si s_n está acotada superiormente converge y por definición la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Si la sucesión no está acotada superiormente tendremos para cada $K > 0$ un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=0}^{n_0} a_i > K$.

Ejercicio 2.

1. Aplicando la definición de límite, como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, sabemos que dado $K_1 > 0$ existe un $K_2 > 0$ tal que si $x > K_2$ entonces $f(x) > K_1$, esto asegura en particular que existe $x_1 > 0$ con $f(x_1) > 0$. A su vez, como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, y por un argumento similar al anterior tenemos $x_2 < 0$ tal que $f(x_2) < 0$. Utilizando el teorema de Bolzano en el intervalo $[x_1, x_2]$ podemos asegurar que f tiene una raíz.
2. Como $\lim_{x \to +\infty} x^{69} + \frac{1}{1+sen^2(x)} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^{69} + \frac{1}{1+sen^2(x)} = -\infty$, y f es continua ya que $1 + sen^2(x)$ nunca se anula, podemos aplicar la parte anterior y concluir que f tiene una raíz.

Ejercicio 3.

1. Como f es continua en [a,b], por el Teorema de Weierstrass f tiene máximo y mínimo. Esto implica que la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ esta acotada superior e inferiormente y por lo tanto tiene una subsucesión convergente.
2. La afirmación es falsa. Podemos considerar $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ y la sucesión definida como $x_n = (-1)^n$.