# Resolución del examen de diciembre de cálculo 1
# 20/12/2014

### Ejercicios de M.O.

## versión 1

Considere las raíces cúbicas de $i$...

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | D | B | D | A | E |

## versión 2

La integral definida...

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| C | B | A | C | B | E |

## versión 3

Dadas las siguientes series:...

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| E | B | B | E | D | A |

## versión 4

Sea $f(t) = \begin{cases} x + 2 + sen(x)cos(x), & x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 2, & x > 0. \end{cases}$
...

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| E | D | E | C | A | C |

### Desarrollo

**Ejercicio 1.** a) Ver teórico.

b) Utilizando la definición de integral impropia de primera especie:

$$\int_a^{+\infty} f'(t)g(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Aplicando integración por partes (la parte $a$) )tenemos que:

$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{b\to+\infty}(f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt)$
$= \lim_{b\to+\infty} f(t)g(t)|_a^b - \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)g'(t)dt$
ya que ambos límites existen.
Utilizando nuevamente la definición de integral impropia llegamos al resultado buscado.

c) Para probar que $\int_1^{+\infty}\frac{cos(t)}{t}dt$ converge utilizamos la parte anterior con $g(t)=\frac{1}{t}$ y $f(t)=sen(t)$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{cos(t)}{t}dt = \frac{sen(t)}{t}|_a^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{sen(t)}{t^2}dt.$$

Como $\int_1^{+\infty}\frac{sen(t)}{t^2}dt$ converge absolutamente ya que $|\frac{sen(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ y $\lim_{t\to+\infty}\frac{sen(t)}{t}=0$ tenemos que $\int_1^{+\infty}\frac{cos(t)}{t}dt$ converge.

**Ejercicio 2.**

- $\sum(a_n)^2$: Como $\sum a_n$ converge tenemos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ y esto implica que: $0 \leq a_n \leq (a_n)^2$ a partir de un $n_0$ dado.
  Aplicando el criterio de comparación tenemos que $\sum(a_n)^2$ converge.
- $\sum sen(a_n)$: Aquí utilizamos que $sen(a_n)\geq 0$ a partir de un $n_0$ y $\lim_{n\to+\infty}\frac{sen(a_n)}{a_n}=1$. Por lo tanto $\sum a_n$ y $\sum sen(a_n)$ son del mismo tipo lo que implica que $\sum sen(a_n)$ converge.
- $\sum\frac{1}{a_n}$: Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ tenemos que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \infty$ y no se cumple la condición necesaria de convergencia por lo tanto $\sum\frac{1}{a_n}$ no converge.
- $\sum(-1)^n a_n$: Como $\sum|(-1)^n a_n| = \sum a_n$ la serie es absolutamente convergente.