Probar por Inducción Completa lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \qquad \forall n > 1$$

Paso Base: n=2 ¿Se cumplirá la fórmula para $n = 2$?

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{i}} \overset{?}{>} \sqrt{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}+1 > 2$$

$\Rightarrow$ Se cumple la fórmula para $n = 2$

Paso Inductivo:

- Hipótesis: Se cumple la fórmula para un natural cualquiera n

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

- Tésis: Se cumple la fórmula para el natural siguiente, $n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n+1}$$

$\boxed{\text{Demostración}}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{H}{>} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ahora observo los extremos de lo anterior (que es algo que se cumple!):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Si se llegara a cumplir lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} \sqrt{n+1}$$

Se cumpliría mi Tésis y la demostración estaría lista!!. Entonces voy a demostrar la última desigualdad:

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}.\sqrt{n}+1 > n+1 \Leftrightarrow \sqrt{n+1}.\sqrt{n} > n \underbrace{\Leftrightarrow}_{Elevo\ a\ la\ 2} (n+1).n > n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n > n^2 \Leftrightarrow n > 0$$

Demostré entonces mi Tésis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$