Solución parcial 2 de mayo de 2016

Múltiple Opción

Respuestas

Sea $A = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$...

1	2	3	4	5
A	A	E	B	B

Sin intervención humana, una población de bacterias se duplicaría cada hora...

1	2	3	4	5
C	E	C	E	D

El polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ tiene una raíz con parte real nula...

1	2	3	4	5
C	A	B	C	D

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$...

1	2	3	4	5
E	B	E	C	C

Ejercicio 1

Sea $A = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

A) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no tiene máximo.

B) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

C) A tiene supremo, que es máximo.

D) A no está acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

E) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

Solución: $0 < m < n \Rightarrow 0 < \frac{m}{n} < 1 \Rightarrow A$ acotado superiormente por 1 y $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ tiene supremo.
$sup(A) = 1$ pues $\frac{m}{n} < 1 = sup(A)$ y la sucesión $x_n = \frac{n}{n+1} \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$
$sup(A) \notin A$ por lo tanto A no tiene máximo.

La solución es la opción A

Ejercicio 2

Sea la sucesión a_n definida como:
$a_0 = 1$
$a_n = \frac{3}{n}a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$

A) a_n converge, y por lo tanto está acotada superiormente e inferiormente.

B) a_n está acotada superiormente e inferiormente, pero no converge.

C) a_n converge, pero no está acotada superiormente.

D) a_n es creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge.

E) a_n es creciente y no está acotada superiormente, por lo tanto diverge a $+\infty$.

Solución: $a_n = \frac{3}{n}a_{n-1} = \frac{3}{n}\frac{3}{n-1}a_{n-2} = ... = \frac{3^n}{n!}a_0 = \frac{3^n}{n!}$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. De esto se puede deducir como vimos en el teórico que la sucesión está acotada.
En cuanto al crecimiento, $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{3^{n+1}}{3^n} \leq \frac{(n+1)!}{n!} \Leftrightarrow 3 \leq n+1 \Leftrightarrow 2 \leq n$.
Se observa que $a_1 = \frac{3^1}{1!} = 3$; $a_2 = \frac{3^2}{2!} = 9/2 = 4,5$; $a_3 = 27/6 = 4,5$; $a_4 = 81/24 = 27/8$ por tanto la sucesión es creciente hasta $n = 3$ y luego pasa a ser decreciente.
A partir de lo anterior también se puede deducir la acotación dado que $0 < a_n \leq 9/2$

La solución es la opción A.

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$. Sea I el intervalo cerrado de longitud máxima, que contiene al 0, en el cual f es invertible, y sea g la función inversa de f en I.

A) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.

B) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.

C) f no es inyectiva en ningún intervalo que contenga al 0.

D) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.

E) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.

Solución: $f'(x) = x^2 + x - 6$. Estudiando el signo tenemos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 2$. El crecimiento de la función f se observa en la figura 1

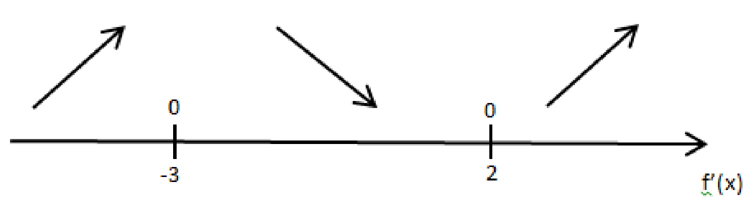

Figura 1: Signo de f'

El intervalo cerrado de longitud máxima que contiene al cero y donde la función es inyectiva es por tanto $I = [-3, 2]$ puesto que al tener derivada negativa en el intervalo abierto la función será siempre estrictamente decreciente.

Sea $g : f([-3, 2]) \to [-3, 2]$ la invresa de f en ese intervalo. Por el teorema de la derivada de la función inversa $g'(4) = \frac{1}{f'(x_0)}$ con $x_0/f(x_0) = 4$.
Por tanto $f(x_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^2}{2} - 6x_0 + 4 = 4 \Leftrightarrow \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^2}{2} - 6x_0 = 0$.
$x_0 = 0$ es solución y $0 \in I$. Como f inyectiva en I, x_0 es solución y es además la única en el intervalo I.
$f'(0) = -6 \Rightarrow g'(4) = -\frac{1}{6}$

La solución es la opción E.

Ejercicio 4

El polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ tiene una raíz con parte real nula. Considere sus raíces en $\mathbb{C}$.

A) Una de ellas tiene módulo menor que 1 y las otras módulo mayor que 1.

B) Todas tienen módulo mayor que 1.

C) Todas tienen módulo menor que 1.

D) Dos de ellas tienen módulo menor que 1 y las otras módulo mayor que 1.

E) Existe al menos una con módulo igual a 1.

Solución: Se sabe que $z_0 = \alpha i$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es raíz de $P(z)$ por tanto:
$P(z_0) = (\alpha i)^4 - 2(\alpha i)^3 + 6(\alpha i)^2 - 8\alpha i + 8 = (\alpha^4 - 6\alpha^2 + 8) + i(2\alpha^3 - 8\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha^2 + 8 = 0 \\ 2\alpha^3 - 8\alpha = 0 \end{cases}$$

$2\alpha^3 - 8\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, 2, -2$. De estas tres soluciones, solo $\alpha = \pm 2$ es solución también de $\alpha^4 - 6\alpha^2 + 8 = 0$
Por tanto se obtuvieron dos soluciones de $P(z)$. Aplicando el algoritmo de Ruffini:

	1	-2	6	-8	8
2i		2i	-4-4i	8+4i	-8
	1	-2+2i	2-4i	4i	0
-2i		-2i	4i	-4i	
	1	-2	2	0	

Figura 2: Ruffini

$P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 - 2z + 2)$
Calculando explícitamente las raíces de $z^2 - 2z + 2$ se obtienen las otras dos raíces de $P(z)$, $1 \pm i$
$|1 \pm i| = \sqrt{2} > 1$
$|\pm 2i| = 2 > 1$

La solución es la opción B.

Ejercicio 5

Sin intervención humana, una población de bacterias se duplicaría cada hora. Para controlar dicha población, cada hora se elimina una proporción $p \in (0,1)$ de la población existente. Sea a_n la cantidad de bacterias en la hora n.

A) Si $p = \frac{1}{4}$, $\{a_n\}$ permanece constante.

B) Si $p > \frac{1}{2}$, $\{a_n\}$ es monótona estrictamente decreciente.

C) Si $p < \frac{1}{2}$, $\{a_n\}$ está acotada.

D) Si $p = \frac{3}{4}$, $\{a_n\}$ es monótona creciente.

E) $\forall p \in (0,1)$, $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

Solución: Sea $a_0 > 0$ la población de bacterias inicial. $a_1 = 2(1-p)a_0$, $a_2 = 2(1-p)a_1$ y en general
$a_n = 2(1-p)a_{n-1}$.
La fórmula explícita se puede obtener a partir de la fórmula de recurrencia puesto que
$a_n = 2(1-p)a_{n-1} = (2(1-p))^2 a_{n-2} = ... = (2(1-p))^n a_0$

$\{a_n\}$ se mantiene constante $\Leftrightarrow 2(1-p) = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$
Si $2(1-p) < 1, \{a_n\}$ estrictamente decreciente y $\Rightarrow \text{lím}_{n\to+\infty} a_n = 0$ que ocurre $\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$
Si $2(1-p) > 1, \{a_n\}$ estrictamente creciente y $\Rightarrow \text{lím}_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ que ocurre $\Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$

La solución es la opción B.

Desarrollo

20 puntos.

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ |\sin(x)| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) I) Enuncie y demuestre el Teorema de Bolzano.

II) Demuestre que f tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$, demuestre que es única y determínela con un error menor o igual a $\frac{1}{8}$.

b) I) Defina $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

II) Determine si f es continua y derivable en a, para $a = 0,\ 1,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$. En los casos en que f sea derivable en a, halle $f'(a)$.

III) Realice una representación gráfica de f que incluya el estudio de raíces, crecimiento, extremos relativos y límites en $-\infty$ y $+\infty$.

Solución:

a) I) Ver teórico página 65, Teorema 19.

II) $f(x) = x^3 + x - 1 \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f$ es continua y derivable en $[0, 1]$ por ser un polinomio y $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0, 1]$. Por tanto la función es estrictamente creciente en el intervalo y, si tiene una raíz, esta será única. Demostremos ahora que tiene una raíz.

$f(0) = -1$

$f(1) = 1$

Por lo tanto por el teorema de Bolzano existe una raíz en $(0, 1)$

Aplicando búsqueda binaria (bipartición) sobre el intervalo $[0, 1]$ tenemos que:

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$

Aplicando Bolzano en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se sabe que la raíz tiene que estar en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$f(\frac{3}{4}) = \frac{11}{64}$

Aplicando Bolzano en $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ se sabe que la raíz tiene que estar en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Considerando $x_0 = \frac{5}{8}$, como la raíz $c \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow |x_o - c| < \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) I) Decimos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x > K$ vale que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

II) f es continua en $0 \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} e^{x^2} - 2 = \lim_{x\to0^+} x^3 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1 = -1$. Por lo tanto, f es continua en 0.

f es derivable en $a = 0 \Leftrightarrow$ existe y es finito $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to0^+} x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$. Por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $a = 0$.

Análogamente, f es continua en 1 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} x^3 + x - 1 = \lim_{x\to 1^+} |\sin(x)| = 1 \Leftrightarrow 1 = \sin(1) = 1$. Por lo tanto, f no es continua en 1.
"Si f es derivable en 1 $\Rightarrow$ f es continua 1". Por el contrarrecíproco de este resultado, como f no es continua en 1 $\Rightarrow$ f no es derivable en 1.

$f(x) = |\sin(x)|$, que es continua en todo punto de $(1, +\infty)$ por ser composición de funciones continuas. En particular, f es continua en $\frac{\pi}{2}$ y π.
Para todo $x \in (0, \pi)$, vale que $|\sin(x)| = \sin(x)$, por lo tanto f es derivable en $\frac{\pi}{2}$, y $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$f(x)$ es derivable en $a = \pi \Leftrightarrow$ existe y es finito $\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} \Leftrightarrow \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sin(x)}{x-\pi} \Leftrightarrow \lim_{x\to\pi^-} \cos(x) = \lim_{x\to\pi^+} -\cos(x) \Leftrightarrow -1 = 1$. Por lo tanto, $f(x)$ no es derivable en $a = \pi$.

III) **Raíces:** $e^{x^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{ln(2)}$. Solo la solución negativa será raíz de f.
A partir de la parte a, se sabe que c es la única raíz en el intervalo $[0, 1]$.
$|\sin(x)| = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Solo serán raíces de f los $x = k\pi$ con $k > 1$.

Crecimiento y extremos relativos: $f'(x) = 2xe^{x^2} < 0, \forall x < 0$ por lo tanto en $(-\infty, 0)\,, f$ es estrictamente decreciente y no hay extremos relativos.
En $(0, 1)\,, f'(x) > 0$ por lo que la función es estrictamente creciente en este intervalo y no tiene extemos relativos.
Del crecimiento de f a izquierda y derecha de 0 se concluye que 0 es un mínimo relativo.
Como f es creciente a la izquierda de 1, y por otra parte $f(1) = 1$ y $\forall x > 1$ $f(x) = |\sin(x)| \leq 1$, se concluye que 1 es un máximo relativo.
En $(1, +\infty)$, se tiene que:

- En $\left((1, \frac{\pi}{2}\right), f'(x) > 0$.
- $f'(x) < 0$ si $x \in \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ con k impar.
- $f'(x) > 0$ si $x \in \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ con k par.
- $f'(x) = 0$ si $x = k\frac{\pi}{2}$ con k impar.
- Si $x = k\frac{\pi}{2}$ con k par, f no es derivable en x.

($k \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 1$)
Del crecimiento en este intervalo se concluye que $k\frac{\pi}{2}$ es un máximo relativo si k es impar y es un mínimo relativo si k es par, $\forall k \geq 1$.
Límites intinitos: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{x^2} - 2) = +\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} |\sin(x)|$, que no existe: por ejemplo consideremos las sucesiones $(a_n) = n\pi$ y $(b_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi$ y observemos que $\lim_{n\to-\infty} |\sin(a_n)| = 0$ mientras que $\lim_{n\to-\infty} |\sin(b_n)| = 1$.

La imagen 3 muestra la representación gráfica

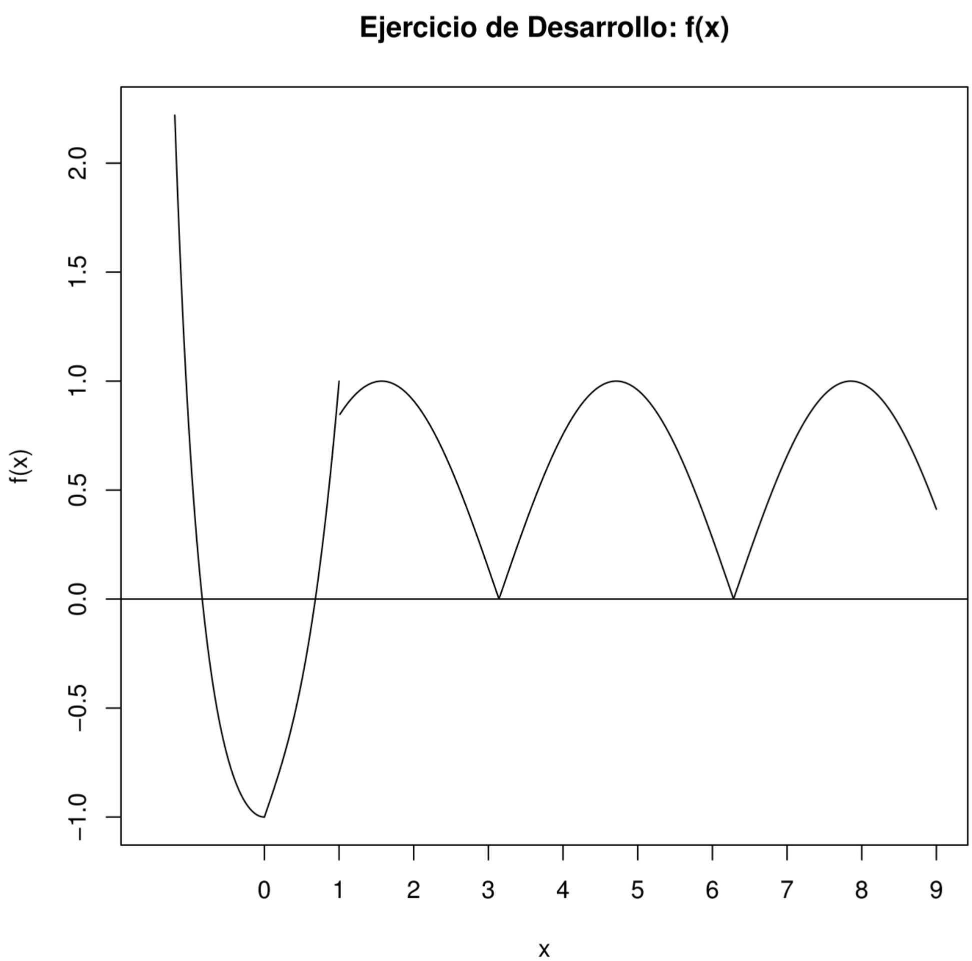

Figura 3: Representación gráfica de f