Anexo 2: Demostraciones

Funciones reales de variable real

Demostración de: Propiedades del valor absoluto 179 de la página 85

Propiedades del valor absoluto 179.-

a) $|a| \geq 0,\ \forall a$ y $|a| = 0 \iff a = 0$

b) $|ab| = |a|\,|b|$

c) $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

d) $|a| \leq k \iff -k \leq a \leq k$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$

f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

Demostración:

a) $|a| \geq 0$ por la definición. Para la segunda parte, si $|a| = 0$, o bien $a = |a| = 0$, o bien $a = -|a| = 0$, luego necesariamente $a = 0$; la otra implicación es obvia pues $|0| = 0$.

b) Consideremos los casos: si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ se tiene $|ab| = ab = |a|\,|b|$; si $a \leq 0$ y $b \leq 0$ se tiene $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\,|b|$; y si $a \leq 0$ y $b \geq 0$, entonces $|ab| = -ab = (-a)b = |a|\,|b|$.

c) De $1 = |1| = |a^{-1}a| = |a^{-1}|\,|a|$, se obtiene el resultado.

d) Si $|a| \leq k$, ó $a = |a| \leq k$ que cumple la segunda desigualdad ó $-a = |a| \leq k$, pero entonces $-k \leq a$ y se cumple la primera. Si $-k \leq a \leq k$, se tiene $k \geq -a \geq -k$, por lo que $-k \leq |a| \leq k$.

e) Como $\forall x,\ x \leq |x|$, ó $|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$, o bien $|a+b| = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$.

f) $|a| = |a - b + b| \leq |a-b| + |b|$, luego $|a| - |b| \leq |a-b|$; y con b se tiene $|b| - |a| \leq |b-a|$. Luego $-|a-b| = -|b-a| \leq -(|b| - |a|) = |a| - |b| \leq |a-b|$ y por d) se concluye la prueba ■

Límites y continuidad

Demostración de: Proposición 196 de la página 92

Proposición 196.- Sean $f, g, h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A.

1.- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en A y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

2.- Si g está acotada en A y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot f(x) = 0$

Demostración:

1.- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$:

existe δ_1 tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$, entonces $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

existe δ_2 tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, entonces $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

luego tomado $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $L - \varepsilon < h(x) \leq g(x) \leq f(x) < L + \varepsilon$.

2.- Si g está acotada, existe $K>0$ tal que $|g(x)|\leq K$, para todo x, luego se verifica que
$$0\leq |g(x)f(x)|\leq K\,|f(x)|, \quad \text{para todo } x$$
Por el apartado anterior, si probamos que $\lim\limits_{x\to x_0} K\,|f(x)|=0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)f(x)|=0$ y se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)f(x)=0$ (por la proposición 195).

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \iff \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que si $0<|x-x_0|<\delta$ se verifica que $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{K}$. Entonces, si $0<|x-x_0|<\delta$ se tiene que
$$|K\,|f(x)|-0|=K\,|f(x)|<K\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon$$
lo que concluye la prueba. ■

Demostración de: Propiedades 197 de la página 92

Propiedades 197.- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1\in\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2\in\mathbb{R}$, entonces:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1+L_2$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1\cdot L_2$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2\neq 0$.

Demostración:

1.- Por la definición de límite, tenemos que

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1 \iff$ para cada $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_1>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta_1 \implies |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2 \iff$ para cada $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_2>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta_2 \implies |g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

luego tomando $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, tenemos que: para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta$ (luego menor que δ_1 y menor que δ_2), entonces
$$|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)|=|f(x)-L_1+g(x)-L_2|\leq|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

2.- Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=L_1L_2 \iff \lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)g(x)-L_1L_2\Big)=0$, veamos esto último. Pero
$$f(x)g(x)-L_1L_2=f(x)g(x)-L_2f(x)+L_2f(x)-L_1L_2=f(x)(g(x)-L_2)+L_2(f(x)-L_1)$$
y sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-L_1)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-L_2)=0$, $f(x)$ está acotada en algún entorno de x_0 (Th de acotación) y L_2 es constante. Por el segundo resultado de la Proposición 196, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)(g(x)-L_2)=0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} L_2(f(x)-L_1)=0$, luego $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)g(x)-L_1L_2\Big)=0+0=0$.

3.- Por ser $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$, por el apartado anterior, basta probar que $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{L_2}$.

Como $\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}=\frac{L_2-g(x)}{g(x)L_2}=\frac{1}{g(x)L_2}(L_2-g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-L_2)=0$ y L_2 es constante, si probamos que la función $\frac{1}{g(x)}$ está acotada en un entorno de x_0, por la Proposición 196 tendremos que $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)L_2}(L_2-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}\Big(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\Big)=0$, lo que prueba el resultado.

En efecto, si $L_2\neq 0$, por el teorema del signo, o bien $-K<g(x)<-k<0$ si $L_2<0$, o bien $0<k<g(x)<K$ si $L_2>0$. Entonces, $0<k<|g(x)|<K$ y, por tanto, $0<\frac{1}{K}<\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{k}$, luego $\frac{1}{g(x)}$ está acotada. ■

Demostración de: Teorema 199 de la página 93

Teorema 199.- Sean $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big).$$

Demostración:
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$,

para cada $\varepsilon_1>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon_1$.

Por otra parte, si g es continua en b se tiene que:

para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que si $|y-b|<\delta_1$ entonces $|g(y)-g(b)|<\varepsilon$.

Entonces, haciendo $\varepsilon_1=\delta_1$ y reuniendo ambas conclusiones:

para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ se tiene $|f(x)-b|<\varepsilon_1=\delta_2$ y, por tanto, $|g(f(x))-g(b)|<\varepsilon$.

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b) = g\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)$. ■

Demostración de: Proposición 201 de la página 93

Proposición 201 (*Convergencia propia*).- Sean $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, con $f(x)\neq b$ para todos los x de un entorno reducido $E^*(a,\delta_0)$ de a, entonces

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{f(x)\to b} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y).$$

Demostración:
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, para cada $\varepsilon_1>0$ existe $\delta_1>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta_1$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon_1$, y como $f(x)\neq b$ en $E^*(a,\delta_0)$, si tomamos $\delta=\text{mín}\{\delta_0,\delta_1\}$, se tiene que:

para cada $\varepsilon_1>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $0<|f(x)-b|<\varepsilon_1$.

Por otra parte, si $L=\lim\limits_{y\to b} g(y)$ se tiene que:

para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_2>0$ tal que si $0<|g(y)-L|<\delta_2$ entonces $|g(y)-L|<\varepsilon$.

Entonces, haciendo $\varepsilon_1=\delta_2$ y reuniendo ambas conclusiones:

para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ se tiene $0<|f(x)-b|<\varepsilon_1=\delta_2$ y, por tanto, $|g(f(x))-L|<\varepsilon$.

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L = \lim\limits_{y\to b} g(y)$. ■

Demostración de: Proposición 203 de la página 94

Proposición 203 (*Límites laterales*).- Sean $a<c<b$ y $f\colon (a,c)\cup(c,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Demostración:
Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$, para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-c|<\delta$ se tiene que $|f(x)-L|<\varepsilon$. Luego en particular, si $0<|x-c|<\delta$ y $x<c$ se cumple por lo que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=L$ y también si $x>c$, por lo que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$.

Recíprocamente, si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$, se tiene que

para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que si $0<|x-c|<\delta_1$ y $x<c$ se tiene $|f(x)-L|<\varepsilon$
para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_2>0$ tal que si $0<|x-c|<\delta_2$ y $x>c$ se tiene $|f(x)-L|<\varepsilon$

tomando $d=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$, para cada x con $0<|x-c|<\delta$ sea $x<c$ ó $x>c$ se cuple la definición de límite en c. Luego $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$. ■

Demostración de: Continuidad de algunas funciones elementales 211 de la página 96

Continuidad de algunas funciones elementales 211.-

- ⋆ $f(x)=e^x$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.
- ⋆ $f(x)=\ln x$ es continua en $(0,+\infty)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$.
- ⋆ $f(x)=x^\alpha$ continua en $(0,\infty)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=\infty$ si $\alpha>0$ (resp. ∞ y 0 si $\alpha<0$).
- ⋆ $f(x)=\operatorname{sh} x$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x=+\infty$.
- ⋆ $f(x)=\operatorname{ch} x$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x=\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x=+\infty$.
- ⋆ $f(x)=\operatorname{th} x$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x=1$.
- ⋆ $f(x)=\operatorname{sen} x$ es periódica de periodo 2π, continua en $\mathbb{R}$ y $\nexists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x$.
- ⋆ $f(x)=\cos x$ es de periodo 2π, continua en $\mathbb{R}$ y $\nexists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$.
- ⋆ $f(x)=\operatorname{tg} x$ es de periodo π, continua en su dominio y $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x=\infty$.

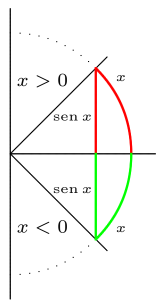
Demostración:
Ya hemos probado que e^x es continua en $\mathbb{R}$ y sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (basta recordar que e^x es creciente, luego o está acotada, o no lo está y su límite es $+\infty$, pero como $2^n\to+\infty$ y $2^n<e^n$, los valores e^n no están acotados). Veamos lo demás:

- ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}=0$
- ⋆ Para cada $a\in(0,\infty)$, $e^{\ln a}=a=\lim\limits_{x\to a} x=\lim\limits_{x\to a} e^{\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to a}\ln x}$; y como la exponencial es estrictamente creciente, debe ser $\ln a=\lim\limits_{x\to a}\ln x$. Luego $\ln$ es continua en a.

  Como $\ln x$ es estrictamente creciente y continua, y $+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty} x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln e^x=\lim\limits_{e^x\to+\infty}\ln(e^x)$, no está acotada por lo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

  Análogamente, $-\infty=\lim\limits_{x\to-\infty} x=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln e^x=\lim\limits_{e^x\to 0^+}\ln(e^x)$, no está acotada inferiormente por lo que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.
- ⋆ Como $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ es continua por ser composición de continuas y si $\underline{\alpha>0}$:
  $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{\alpha\ln x\to-\infty} e^{\alpha\ln x}=0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{\alpha\ln x\to\infty} e^{\alpha\ln x}=+\infty$
  $\underline{\alpha<0}$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{\alpha\ln x\to+\infty} e^{\alpha\ln x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{\alpha\ln x\to-\infty} e^{\alpha\ln x}=0$
- ⋆ $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, luego continua y $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\left(\frac{0-\infty}{2}\right)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\left(\frac{\infty-0}{2}\right)=+\infty$.
- ⋆ $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, luego continua y $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(\frac{0+\infty}{2}\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(\frac{\infty+0}{2}\right)=+\infty$.
- ⋆ $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, luego continua y como $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$:
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th} x=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{0+1}=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th} x=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{e^{2x}+1}=\left(1-\frac{2}{\infty+1}\right)=1$
- ⋆ De geometría sabemos ya que las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π.

  Para la continuidad, veamos primero que $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ lo son en $x=0$:
  Por la construcción geométrica del seno, sabemos que en una circunferencia de radio 1, la longitud del arco recorrido coincide con la amplitud del ángulo en radianes, luego si $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, se cumple $0\le|\operatorname{sen}(x)|\le|x|$ (ver figura). Es decir, que $-x\le\operatorname{sen}(x)\le x$ y como $0=\lim\limits_{x\to 0}-x\le\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)\le\lim\limits_{x\to 0} x=0$, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)=0=\operatorname{sen}(0)$. Luego el seno es continuo en $x=0$.



Para ver que $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$, probemos que $\lim\limits_{x\to 0}\big(1-\cos(x)\big)=0$:

$\lim\limits_{x\to 0}\big(1-\cos(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0}2\,\text{sen}^2(\frac{x}{2})=2\big(\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}(\frac{x}{2})\big)^2=2\cdot 0^2=0$

Veamos ahora que son continuas en todo punto x_0 de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\text{sen}(x)&=\lim_{h\to 0}\text{sen}(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\big(\text{sen}(x_0)\cos(h)+\text{sen}(h)\cos(x_0)\big)\\&=\text{sen}(x_0)\big(\lim_{h\to 0}\cos(h)\big)+\big(\lim_{h\to 0}\text{sen}(h)\big)\cos(x_0)=\text{sen}(x_0)\cdot 1+0\cdot\cos(x_0)=\text{sen}(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\cos(x)&=\lim_{h\to 0}\cos(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\big(\cos(x_0)\cos(h)-\text{sen}(x_0)\,\text{sen}(h)\big)\\&=\cos(x_0)\big(\lim_{h\to 0}\cos(h)\big)-\text{sen}(x_0)\big(\lim_{h\to 0}\text{sen}(h)\big)=\cos(x_0)\cdot 1+\text{sen}(x_0)\cdot 0=\cos(x_0)\end{aligned}$$

La periodicidad de las funciones asegura que no existe el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{sen}\,x$, pues cuando $n\to\infty$ los puntos $x=2\pi n$ y los puntos $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ se alejan hacia $+\infty$ y sucede que $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}(\frac{\pi}{2}+n2\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}(\frac{\pi}{2})=1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}(n2\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}(0)=0$, que son valores distintos.

⋆ Para la continuidad de la tangente bastan las propiedades del cociente $\text{tg}\,x=\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$.

■

Demostración de: Algunos infinitos e infinitésimos conocidos 215 de la página 96

Algunos infinitos e infinitésimos conocidos 215.- Usaremos la notación $f\sim g$ para indicar que f y g son infinitos o infinitésimos equivalentes:

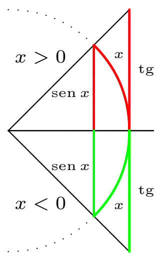
$$\begin{array}{rlrl}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\sim a_nx^n & \text{cuando } x\to\pm\infty & a_nx^n+\cdots+a_1x\sim a_1x & \text{cuando } x\to 0\\ \text{sen}(x)\sim x & \text{cuando } x\to 0 & \text{tg}(x)\sim x & \text{cuando } x\to 0\\ \text{sen}\,\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x} & \text{cuando } x\to\pm\infty & 1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2} & \text{cuando } x\to 0\\ \ln(1+x)\sim x & \text{cuando } x\to 0 & e^x-1\sim x & \text{cuando } x\to 0\\ \text{sh}(x)\sim x & \text{cuando } x\to 0 & \text{ch}(x)-1\sim\frac{x^2}{2} & \text{cuando } x\to 0\end{array}$$

Demostración:

⋆ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{a_nx^n}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}=1+0+\cdots+0+0=1$

⋆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x}{a_1x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_n}{a_1}x^{n-1}+\frac{a_{n-1}}{a_1}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_2}{a_1}x+1=0+0+\cdots+0+1=1$

⋆ Veamos que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1$, con una pequeña argucia geométrica (ver figura):
En una circunferencia de radio 1, la longitud del arco recorrido coincide con la amplitud del ángulo (en radianes), luego si $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, se tiene que $0<\text{sen}(x)<x<\text{tg}(x)$ de donde, dividiendo por $\text{sen}(x)$, se tiene $1<\frac{x}{\text{sen}(x)}<\frac{1}{\cos(x)}$ y tomando límites: $1\le\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\text{sen}(x)}\le\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos(x)}=1$. Luego $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\text{sen}(x)}=1$.
Si $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$, se tiene que $0>\text{sen}(x)>x>\text{tg}(x)$ de donde, dividiendo por $\text{sen}(x)$ (que es negativo), se tiene $1<\frac{x}{\text{sen}(x)}<\frac{1}{\cos(x)}$ como antes. Luego $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\text{sen}(x)}=1$.



⋆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$.

⋆ Considerando $y=g(x)=\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0^+$ con $g(x)\neq 0$ para todo x, luego por la proposición 201 de convergencia propia, se tiene: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}\,g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\text{sen}\,y}{y}=1$. (Idem si $x\to-\infty$)

⋆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2\overset{(1)}{=}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{sen}\,y}{y}\right)^2=1$. (1) Con $y=g(x)=\frac{x}{2}$.

⋆ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\overset{(1)}{=}\ln\left(\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)=\ln(e)=1$
Considerando en (1) $y=g(x)=\frac{1}{x}$ y luego el ejemplo 210. Análogamente, para $x\to 0^-$:
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim\limits_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)=\ln(e)=1$.

- $\star$ Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$, consideramos $y = g(x) = e^x - 1$, est. creciente y con $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Ademas $1+y = e^x$ y $\ln(1+y) = x$. Luego: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$.
- $\star$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x 2x} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}\right) \overset{(1)}{=} 1 \cdot \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$. (1) $y = g(x) = 2x$.
- $\star$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{2\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}+1-2e^x}{e^x x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^x x^2} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\right)^2 = 1$.

■

Demostración de: Teorema de Bolzano 218 de la página 98

Teorema de Bolzano 218.- Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y que toma valores de signo opuesto en a y b (es decir, $f(a)f(b) < 0$) entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración:
Podemos suponer que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Tomemos $c_0 = \frac{a+b}{2}$ el punto medio entre a y b:

Si $f(c_0) = 0$, como $c = c_0 \in (a,b)$, es el punto buscado. Si $f(c_0) \neq 0$ pueden darse dos casos:

- $\star$ si $f(c_0) > 0$, como $f(a) < 0$ y f continua en $[a, c_0]$, el teorema se reduce al intervalo $[a, c_0]$;
- $\star$ si $f(c_0) < 0$, como $f(b) > 0$ y f continua en $[c_0, b]$, el teorema se reduce al intervalo $[c_0, b]$.

En un caso u otro el teorema queda probado si lo hacemos en el intervalo $[a_1, b_1] \subset [a,b]$ (bien $[a, c_0]$ o bien $[c_0, b]$) de longitud $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, en el cual f es continua, $f(a_1) < 0$ y $f(b_1) > 0$.

En este intervalo, tomamos su punto medio $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Si $f(c_1) = 0$ es el punto buscado; si $f(c_1) \neq 0$ se puede, como hicimos antes, reducir el teorema al intervalo $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ de longitud $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ en el cual f es continua, $f(a_2) < 0$ y $f(b_2) > 0$.

Repitiendo sucesivamente el proceso anterior, y si ninguno de los puntos medios, c_n, verifica que $f(c_n) = 0$, entonces hemos construido una sucesión de intervalos cerrados encajados

$$[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots \qquad \text{con } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) < 0 \quad \text{y} \quad f(b_n) > 0.$$

Además, los puntos a_n extremos inferiores verifican que $a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b$, luego el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente (por b) y, por tanto, existe $c = \sup A$; como $a \le a_n \le b$ se cumple $a \le c \le b$ luego $c \in [a,b]$. Por ser $c = \sup A$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $a_{n_0} \in A$ con $c - \varepsilon < a_{n_0} \le c$, y como a_n crece con n, para cada $n \ge n_0$ se tiene $a_{n_0} \le a_n \le c$. Luego

$$c - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le c < c + \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0 \iff |a_n - c| < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ y, por ser f continua en $[a,b]$, se tiene que $0 \ge \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$, luego $f(c) = 0$. En consecuencia, existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = 0$ y, como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, $c \neq a$ y $c \neq b$, luego $c \in (a,b)$.

■

Demostración de: Corolario 220 de la página 98

Corolario 220.- Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I, entonces $f(I)$ es también un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración:
Supongamos primero que $f(I)$ no está acotado ni superior ni inferiormente. Entonces, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe algún valor mayor que él en $f(I)$, $y < f(b) \in f(I)$, y existe algún valor de $f(I)$ menor que él, $y > f(a) \in f(I)$, luego $f(a) < y < f(b)$. Como a y b son del intervalo I, el intervalo $[a,b] \subseteq I$ (o $[b,a] \subseteq I$), luego por el teorema de los valores intermedios 219 existe c entre a y b tal que $f(c) = y$, luego $y \in f(I)$ y $f(I) = \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $f(I)$ no está acotado inferiormente pero sí superiormente, y sea $\Gamma = \sup f(I)$. Entonces, por ser extremo superior, para cada $y < \Gamma$, existe un punto $f(b) \in f(I)$ tal que $y < f(b) \le \Gamma$ y, por no estar $f(I)$ acotado inferiormente, existe $a \in I$, tal que $f(a) < y < f(b)$. Luego por el teorema 219 existe

c entre a y b tal que $f(c) = y$, luego $y \in f(I)$ de donde $(-\infty, \Gamma) \subseteq f(I)$. Pero como Γ es el superior del conjunto, $f(I) = (-\infty, \Gamma)$ ó $f(I) = (-\infty, \Gamma]$ (según que el superior sea máximo o no lo sea).

La prueba, para los dos casos que restan, son enteramente análogas. ■

Demostración de: Teorema de acotación 221 de la página 99

Teorema de acotación 221.- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f está acotada en dicho intervalo. Es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.

La prueba de este resultado se incluye en la prueba del siguiente; el Teorema de Weierstrass 222.

Demostración de: Teorema de Weierstrass 222 de la página 99

Teorema de Weierstrass 222.- Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$. Es decir, $\exists \alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ y $\exists \beta \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(\beta)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demostración:
La demostración de este resultado y del Teorema de acotación 221 anterior, que vamos a exponer aquí no son todo lo rigurosas que sería de desear, por dos razones: la primera, que se hace uso del Teorema de Bolzano-Weierstrass (*Un conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$, tiene al menos un punto de acumulación*) que no se incluye en estos apuntes y, en segundo lugar, que simplificaremos del proceso (con una muy breve explicación) en aras de entender el sentido de la prueba.

Por el Corolario 220, como $J = [a, b]$ es un intervalo, su imagen $f(J)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Veamos primero, que el intervalo $f(J)$ está acotado. Supngamos que es un intervalo no acotado superiormente, en cuyo caso, el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\} \subseteq f(J)$ y existen puntos $x_n \in [a, b]$ tales que $f(x_n) = n$. Los puntos son distintos, pues tienen imágenes distintas por la aplicación f y son infinitos, luego el conjunto $T = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [a, b]$ es infinito y acotado por lo que tiene al menos un punto de acumulación l (Teorema de Bolzano-Weierstrass enunciado arriba). En aras de no complicar el proceso supondremos que es punto de acumulación de todo el conjunto T, es decir, que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ (ser punto de acumulación, significa que nos podemos acercar tanto como queramos al punto l con puntos del conjunto T; luego que l es el límite de los puntos de un subconjunto infinito de T, por lo que tiene un funcionamiento similar a si fuera todo T –en cualquier estudio sobre sucesiones de números reales puede consultarse con más detalle esta simplificación–).

Como $a \leq x_n \leq b$ se tiene que $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$, luego que $l \in [a, b]$. Entonces, por ser f continua en $[a, b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(l) \in \mathbb{R}$; pero por su construcción, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \notin \mathbb{R}$, lo que es absurdo. En consecuencia, $f(J)$ tiene que estar acotado superiormente.

Análogamente, se obtiene que $f(J)$ está acotado inferiormente, lo que prueba el Teorema de acotación 221.

De lo anterior, $f(J)$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, luego de la forma $[c, d]$ o $[c, d)$ o $(c, d]$ o (c, d).

Veamos si d está o no en el conjunto. Por ser $d = \sup f(J)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) = d - \frac{1}{n} < d$, como las imágenes de los x_n son distintas, tenemos un conjunto $T = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinito y acotado que tiene un punto de acumulación l. Con un razonamiento similar al de la parte anterior, sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [a, b]$ y se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(l) \in \mathbb{R}$ por ser f continua y por otro lado, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d - \frac{1}{n} = d$, luego $d = f(l)$ y $d \in f(J)$, por lo que $d = \max f(J)$.

Análogamente, se prueba que $c = \min f(J)$. Lo que concluye la prueba. ■

Demostración de: Corolario 223 de la página 99

Corolario 223.- Si f es continua en (a, b) y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, la función f está acotada en (a, b). (También es cierto cuando a es $-\infty$ y cuando b es $+\infty$.)

Demostración:
Para que el resultado sea cierto no es necesario que exista el límite en los extremos del intervalo, basta con que la función esté acotada en algún entorno de ellos. La razón de poner el enunciado con límites está en que es una manera cómoda de asegurar la acotación y suficiente en la mayoría de los casos.

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, por el Teorema de acotación para límites 216, existe $E(a,\delta_1)$ y $M_1 > 0$ tal que $|f(x)| \leq M_1$ para todo $x \in (a, a+\delta_1)$ y existe $E(b,\delta_2)$ y $M_2 > 0$ tal que $|f(x)| \leq M_2$ para todo $x \in (b-\delta_2, b)$. Entonces, $(a,b) = (a, a+\delta_1) \cup [a+\delta_1, b-\delta_2] \cup (b-\delta_2, b)$ y al ser f continua en el intervalo $[a+\delta_1, b-\delta_2]$ está acotada en él (Th 221), luego existe $M_3 > 0$, tal que $|f(x)| \leq M_3$ para todo $x \in [a+\delta_1, b-\delta_2]$. En consecuencia, f está acotada en cada uno de los tres trozos en que hemos dividido el intervalo, por lo que está acotada; es decir, tomando $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$, para todo $x \in (a,b)$, $|f(x)| \leq M$.

Si $a = -\infty$ ó $b = +\infty$, la prueba es idéntica, tomando entornos de $-\infty$ ó $+\infty$. ■

Funciones derivables

Demostración de: Propiedades 226 de la página 102

Propiedades 226.- Sean f y g funciones derivables en un punto x_0, entonces:

a) $f+g$ es derivable en el punto x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

b) fg es derivable en el punto x_0 y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

c) f/g es derivable en el punto x_0, si $g(x_0) \neq 0$, y $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$.

Demostración:

a) Es cierta, pues

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

b) Basta tomar límites, cuando $x \to x_0$, en la expresión

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

c) Teniendo en cuenta que la expresión

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x-x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x_0) - f(x_0)\, \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right)\end{aligned}$$

es válida en los valores de x próximos a x_0, y tomando límites se obtiene el resultado. ■

Demostración de: Regla de la cadena 227 de la página 102

Regla de la cadena 227.- Sea f derivable en x_0 y g derivable en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g\circ f$ es derivable en x_0 y además:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0).$$

Demostración:
Si $f(x) = f(x_0)$ en un entorno de x_0, también se verifica que $g(f(x)) = g(f(x_0))$ y, por tanto, f y $g \circ f$ son constantes en dicho entorno, luego $g \circ f$ es derivable en x_0 y $(g \circ f)'(x_0) = 0$. Además, como f es constante, se tiene $g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot 0 = 0$ obteniendose la igualdad propuesta.

Si $f(x) - f(x_0) \neq 0$ en un entorno de x_0, podemos escribir

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como $y = f(x) \neq f(x_0) = y_0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, por la proposición 201, se tiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'\Big(f(x_0)\Big)f'(x_0).\end{aligned}$$

■

Demostración de: Teorema del valor medio de Cauchy 236 de la página 106

Teorema del valor medio de Cauchy 236.- Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración:
Como en la demostración del teorema del valor medio de Lagrage 235, construyamos una función para aplicar el teorema de Rolle. Sea $h\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$.

Entonces, h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser suma de funcines continuas y derivables, y

$$\begin{aligned}h(a) &= \big(f(b) - f(a)\big)g(a) - \big(g(b) - g(a)\big)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ h(b) &= \big(f(b) - f(a)\big)g(b) - \big(g(b) - g(a)\big)f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b).\end{aligned}$$

Luego también se cumple que $h(a) = h(b)$ y por el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$; es decir, $0 = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$ de donde se obtiene el resultado $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
Notar, que al ser $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$, se tiene que $g'(c) \neq 0$ y $g(b) \neq g(a)$.

■

Demostración de: Regla General de L'Hopital 238 de la página 106

Regla General de L'Hopital 238.- Sean f y g funciones derivables en un entorno reducido de x_0, $E^*(x_0, \delta)$, con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in E^*(x_0, \delta)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Entonces,

si existe $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se cumple que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración:
Por comodidad, denotaremos por $E^* = E^*(x_0, \delta)$ y por $E = E(x_0, \delta)$.

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, podemos *ampliar* estas funciones hasta E, con continuidad. En efecto, sean $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ 0, & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ y $G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ 0, & \text{si } x = x_0 \end{cases}$; que son continuas en E^* por serlo f y g y continuas en x_0 por su contrucción ($\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = F(x_0)$ y lo mismo para G).

Para cada $x \in E^*$ con $x < x_0$, el intervalo $[x, x_0] \subseteq E$, luego F y G son continuas en él y derivables en (x, x_0), donde se cumple que $F' = f'$ y $G' = g'$. Entonces, por el teorema de Cauchy 236, existe ξ_x con $x < \xi_x < x_0$ tal que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_x)}{G'(\xi_x}, \quad \text{es decir, tal que} \quad \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Luego, como $x < \xi_x < x_0$, si $x \to x_0^-$ también $\xi_x \to x_0^-$ y entonces,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{\xi_x\to x_0^-} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista. Análogamente, para los $x > x_0$, se tiene $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

En consecuencia, si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ por lo que existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior. ■

Para la justificación del funcionamiento de la Regla de L'Hôpital en los demás casos, en que decimos que también funciona, sólo indicamos como se obtendría ésta o en que se basa:

Para el caso $x_0 = \pm\infty$, con el cambio $x = \frac{1}{t}$ se tiene que las funciones $F(t) = f(\frac{1}{t})$ y $G(t) = g(\frac{1}{t})$ verifican que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe si y sólo si $\lim\limits_{t\to 0^\pm} \frac{F(t)}{G(t)}$ existe, y si ocurre son iguales. Aplicando el caso anterior a estas funciones se obtiene el resultado.

Para la indeterminación $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, se toma un punto y fijo y suficientemente cercano a x_0 y entonces, el cociente puede escribirse en la forma $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \cdot \frac{\frac{g(y)}{g(x)}-1}{\frac{f(y)}{f(x)}-1}$. Aplicando el Teorema de Cauchy 236 al primer factor $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$ y teniendo en cuenta, que al ser y fijo, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{g(y)}{g(x)}-1}{\frac{f(y)}{f(x)}-1} = 1$, se observa que el resultado será cierto (la prueba exaustiva no es tan inmediata).

Demostración de: Teorema de la función inversa 240 de la página 107

Teorema de la función inversa 240.- Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $f' > 0$ ó $f' < 0$ en (a,b). Entonces f admite función inversa derivable en (a,b) y $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$.

Demostración:
Por ser $f' > 0$ en (a,b) (resp. $f' < 0$ en (a,b)) la función f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $[a,b]$, luego es inyectiva y existe $f^{-1}\colon f([a,b]) \longrightarrow [a,b]$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para cada $x \in [a,b]$ (recordar la definición 189 y ver los ejemplos siguientes). De hecho, si f es estrictamente creciente, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ y si es estrictamente decreciente, $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

Veamos primero, que si f es continua en x_0, entonces f^{-1} es continua en $y_0 = f(x_0)$. Supongamos que f es estrictamente creciente y sea $y_0 \in \big(f(a), f(b)\big)$. Tomemos un $\varepsilon > 0$ de manera que el intervalo $\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$; entonces $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ y existen y_1 e y_2 tales que $y_1 = f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Sea $\delta > 0$, tal que $E(y_0, \delta) \subseteq (y_1, y_2)$, entonces, para cada $y \in E(y_0,\delta)$, se cumple que $y_1 \le y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \le y_2$ y se tiene que cumplir que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$ pues de no ser así, si $f^{-1}(y_1) \ge f^{-1}(y)$ ó $f^{-1}(y) \ge f^{-1}(y_2)$ por ser f estr. creciente sería $y_1 \ge y$ ó $y \ge y_2$ lo que es absurdo$^{(*)}$. Por consiguiente, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$, es decir $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, es decir $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$ y f^{-1} es continua en y_0. Si el punto es un extremo del intervalo o para f estrictamente decreciente, basta adaptar la prueba.

Veamos ahora que si f es derivable en $x_0 \in (a,b)$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$, pero esto es sencillo, pues si $y \neq y_0$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}$$

Si $y \to y_0$, $x = f^{-1}(y)$ tenderá hacia $x_0 = f^{-1}(y_0)$ con $x \neq x_0$ por ser f^{-1} inyectiva, en consecuencia, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ con lo que f^{-1} es derivable en y_0 y su derivada es $(f'(x_0))^{-1}$. ■

Nota: Durante la demostración, se ha probado$^{(*)}$ que: si f es estrictamente creciente (o decreciente), f^{-1} también lo es.

Polinomios de Taylor

Demostración de: Fórmula de Taylor 250 de la página 114

Fórmula de Taylor 250.- Sea una función f existen f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$ y $f^{(n+1)}$ sobre el intervalo $[a,x]$. Entonces,

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ para un cierto } c \in (a,x),$$

llamado *resto de Lagrange*, o también

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a) \text{ para un cierto } c \in (a,x),$$

que se denomina *resto de Cauchy*. ▷

Demostración:
Consideremos la función $G\colon [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(t) = f(x) - \left[f(t) + f^{(1)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} + f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!} + \cdots + f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \right]$$

La función G verifica que $G(x) = 0$ y $G(a) = f(x) - P_{n,a}(x)$ y es derivable en $[a,x]$, por ser suma y producto de derivables. Y su derivada es

$$\begin{aligned}
G'(t) = -\Bigg[& f^{(1)}(t) + \left(f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} + f^{(1)}(t)\frac{1(x-t)^0(-1)}{1!} \right) + \left(f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + f^{(2)}(t)\frac{2(x-t)^1(-1)}{2!} \right) \\
& + \left(f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!} + f^{(3)}(t)\frac{3(x-t)^2(-1)}{3!} \right) + \cdots + \left(f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n-1)}(t)\frac{(n-1)(x-t)^{n-2}(-1)}{(n-2)!} \right) \\
& + \left(f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} + f^{(n)}(t)\frac{n(x-t)^{n-1}(-1)}{(n-1)!} \right) \Bigg] \\
= -\Bigg[& f^{(1)}(t) + \left(f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} - f^{(1)}(t) \right) + \left(f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} \right) \\
& + \left(f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!} - f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} \right) + \cdots + \left(f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} - f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \right) \\
& + \left(f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

quitando los paréntesis internos y cambiando el orden de los sustraendos, se tiene:

$$\begin{aligned}
= -\Bigg[& f^{(1)}(t) - f^{(1)}(t) + f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} - f^{(2)}(t)\frac{(x-t)^1}{1!} + f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} \\
& - f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!} + \cdots - f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
& - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \Bigg]
\end{aligned}$$

y cada término que resta se anula con el anterior, luego sólo queda el último término:

$$= -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Entonces:

⋆ Por el teorema del valor medio de Lagrange, $G(x) - G(a) = G'(c)(x-a)$, para algún $c \in (a,x)$. Luego

$$G(x) - G(a) = -G(a) = -f^{(n+1)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}(x-a) \implies f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$$

- $\star$ Tomando la función $g(t)=(x-t)^{n+1}$, continua en $[a,x]$ y derivable en (a,x), por el teorema del valor medio de Cauchy $G(x)-G(a)=\frac{G'(c)}{g'c)}\big(g(x)-g(a)\big)$, para algún $c\in(a,x)$. Luego

$$-G(a)=\frac{\frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!}}{(n+1)(x-c)^n(-1)}\big(-(x-a)^{n+1}\big) \quad \Longrightarrow f(x)-P_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

y hemos obtenido el resto de Cauchy, en el primer caso, y el de Lagrange en el segundo. ■

Demostración de: Proposición 252 de la página 115

Proposición 252.- Sea f una función de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en un entorno del punto a, para la que se cumple que $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, y además existe $f^{(n)}(a)\neq 0$. Entonces:

a) Si n es par y $f^{(n)}(a)>0$, f presenta un mínimo local en a.

b) Si n es par y $f^{(n)}(a)<0$, f presenta un máximo local en a.

c) Si n es impar y $f^{(n)}(a)>0$, f es estrictamente creciente en a.

d) Si n es impar y $f^{(n)}(a)<0$, f es estrictamente decreciente en a.

Demostración:
Si $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, el polinomio de Taylor de grado n de f en a se reduce al primer y último término, $P_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Por la proposición 249 anterior, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$, luego

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\Big(f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\Big)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

luego

- $\star$ si $f^{(n)}(a)>0$, debe ser $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}>0$ para los x de un entorno de a, y
  - si n es par, $(x-a)^n>0$ de donde $f(x)-f(a)>0$ y $f(x)\geq f(a)$, por lo que $f(a)$ es mínimo local.
  - si n es impar, para los $x<a$ se tiene que $(x-a)^n<0$ de donde $f(x)-f(a)<0$ y $f(x)<f(a)$; y para los $x>a$ se tiene que $(x-a)^n>0$ de donde $f(x)-f(a)>0$ y $f(x)>f(a)$. En consecuencia, f es estrictamente creciente en a.

  Y se cumplen (a) y (c).
- $\star$ si $f^{(n)}(a)<0$, debe ser $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}<0$ para los x de un entorno de a, y
  - si n es par, $(x-a)^n>0$ de donde $f(x)-f(a)<0$ y $f(x)\leq f(a)$, por lo que $f(a)$ es máximo local.
  - si n es impar, para los $x<a$ se tiene que $(x-a)^n<0$ de donde $f(x)-f(a)>0$ y $f(x)>f(a)$; y para los $x>a$ se tiene que $(x-a)^n>0$ de donde $f(x)-f(a)<0$ y $f(x)<f(a)$. En consecuencia, f es estrictamente decreciente en a.

  Y se cumplen (b) y (d).

■