QUINTA PARTE

CAPÍTULOS COMPLEMENTARIOS DEL ANÁLISIS

I. LOS NUMEROS COMPLEJOS Y LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

1. Conceptos fundamentales

La unidad imaginaria. La unidad imaginaria i* se define formalmente como el número que elevado al cuadrado da «-1». La introducción de la unidad imaginaria lleva a la generalización del concepto de número, a los *números complejos*, que desempeñan un papel muy importante en el álgebra y en el análisis, y admiten interpretaciones concretas en algunos problemas de la geometría y física.

Los números complejos. La forma general del número complejo es $a = \alpha+\beta i$; asignando a α y β todos los valores reales posibles, se obtienen todos los números complejos posibles a. El número α se llama *parte real* del número complejo a; β_i es su *parte imaginaria*; β es el coeficiente de la parte imaginaria. Las notaciones son:

$$\alpha = \mathrm{R}(a), \quad \beta = \mathrm{I}(a)^{**}.$$

Si $\beta = 0$, se tiene $a = \alpha$ (los números reales son un caso particular de los números complejos); si $\alpha = 0$, se tiene $a = \beta i$ (números "*imaginarios puros*").

---

* i proviene del francés imaginaire (imaginario). En la electrotécnica, en lugar de i se implea la letra j (para no confundirla con la letra i que designa la intensidad).

** R proviene del francés réel, I de imaginaire.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. Así como los números reales pueden representarse por puntos del eje numérico, los números complejos pueden representarse por puntos del plano: el número $a = \alpha+\beta i$ se representa por un punto de abscisa α y ordenada β (fig. 365). Los números reales se representan por puntos del eje de abscisas *(eje real)*; los imaginarios puros, por puntos del eje de ordenadas *(eje imaginario)*. Como cada punto del plano se determina completamente por el radio vector de este punto (véase la pág. 597), a cada número complejo le corresponde un vector determinado, situado en el plano y que va del polo al punto que corresponde al número complejo (fig. 366). De esta manera, los números complejos pueden representarse tanto por puntos como por vectores.

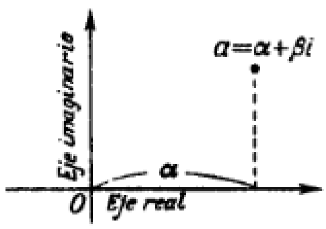

Fig. 365

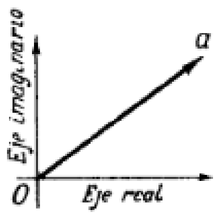

Fig. 366

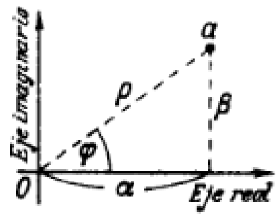

Fig. 367

IGUALDAD DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Por definición, dos números complejos se consideran *iguales*, si son iguales sus partes reales y los coeficientes de sus partes imaginarias. Geométricamente, dos números complejos son iguales, si son iguales los vectores que los representan. En caso contrario, los números no son iguales; para los números complejos no existen los conceptos de "mayor" y "menor".

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO. La expresión de un número complejo $a = \alpha+\beta i$ se llama *forma algebraica;* si en lugar de las coordenadas cartesianas del punto que representa al número complejo, se introducen sus coordenadas polares (pág. 228), resulta la *forma trigonométrica* del número complejo (fig. 367):

$$a = \rho(\cos\varphi+i(\operatorname{sen}\varphi);$$

ρ es la longitud del radio vector del punto correspondiente y se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo (se representa por $|a|$), el ángulo φ (en radianes) es el *argumento* del número complejo (se representa por arg a):

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a.$$

La relación entre ρ, φ y α, β es la misma que entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto (véase la pág. 230):

$$\alpha = \rho \cos\varphi, \qquad \beta = \rho \operatorname{sen}\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha};$$

además, $0 \leqslant \rho < \infty$, y φ puede tomar cualquier valor: $-\infty < \varphi < +\infty$; para un número complejo determinado, el argumento φ admite un conjunto infinito de valores, que se diferencian entre sí en $2k\pi$ (k es entero). El valor principal del argumento está contenido en el intervalo $-\pi < \varphi \leqslant +\pi$. El módulo del *cero* $(0+0i)$ es igual a cero; el argumento del 0 es indeterminado.

Forma exponencial. Frecuentemente se emplea la siguiente forma de anotación de un número complejo a de módulo ρ y argumento φ:

$$a = \rho e^{\varphi i} \quad \textit{(forma exponencial)}^*.$$

Por ejemplo, el número $1+\sqrt{3}i$ puede escribirse así:

forma algebraica $1+\sqrt{3}i =$

forma trigonométrica $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) =$

forma exponencial $= 2e^{\frac{\pi}{3}i}$,

y también, sin limitarse al valor principal del argumento:

$$1+\sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}.$$

Números complejos conjugados. Dos números complejos se llaman *conjugados entre sí* (se representan por a y $\bar{a}$) si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias sólo se diferencian en el signo: $R(\bar{a}) = R(a)$, $I(\bar{a}) = -I(a)$. En la interpretación geométrica, los puntos que representan los números conjugados son simétricos con respecto al eje real. Los módulos de los números conjugados son iguales, los argumentos se diferencian en el signo

$$a = \alpha+\beta i = \rho(\cos\varphi+i \operatorname{sen}\varphi) = \rho e^{\varphi i},$$

$$\bar{a} = \alpha-\beta i = \rho(\cos\varphi-i \operatorname{sen}\varphi) = \rho e^{-\varphi i}.$$

* Sobre esto véase mas detalladamente a continuación en las págs. 573-574.

2. *Operaciones algebraicas*

LA SUMA Y LA DIFERENCIA de dos o varios números complejos se define por la fórmula

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)-(\alpha_3+\beta_3 i)+\ \dots = (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ \dots)+ \\ +(\beta_1+\beta_2-\beta_3+\ \dots)\, i.$$

En la interpretación geométrica, para obtener el vector que representa la suma o la diferencia de dos o varios números se deben sumar o restar los vectores que representan estos números según las reglas de las operaciones con los vectores (pág. 597) (fig. 368).

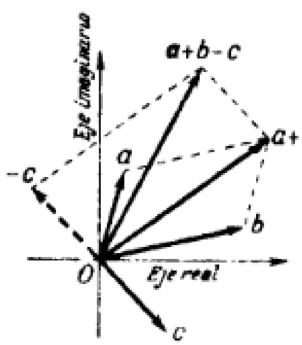

Fig. 368

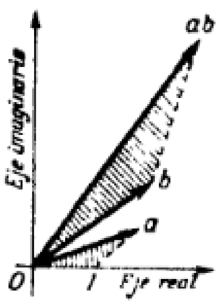

Fig. 369

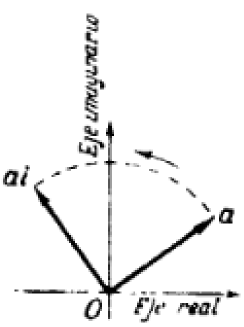

Fig. 370

LA MULTIPLICACIÓN de dos números complejos se define por la fórmula

$$(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\, i.$$

Si los números vienen dados en forma trigonométrica, entonces

$$[\rho_1 (\cos\varphi_1+i \operatorname{sen}\varphi_1)]\,[\rho_2 (\cos\varphi_2+i \operatorname{sen}\varphi_2) = \\ = \rho_1\rho_2 \cos[(\varphi_1+\varphi_2)+i \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)],$$

es decir, el módulo de producto es igual al producto de los módulos, el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores. Geométricamente el vector que representa el producto de a por b se obtiene haciendo girar al vector a un ángulo igual al arg b, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y alargándolo después $|b|$ veces. El producto ab también se puede obtener construyendo un triángulo semejante (fig. 369). En particular, al multiplicar un número a por i, el vector que representa al número a gira un ángulo $\pi/2$ sin alterar su longitud (fig. 370).