# Práctico 2
# MVU, CRLB, Modelos Lineales

ESTIMACIÓN y PREDICCIÓN en SERIES TEMPORALES

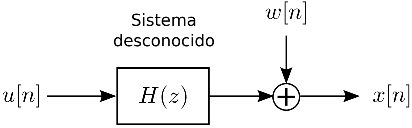
Departamento de Procesamiento de Señales
Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

Curso 2022

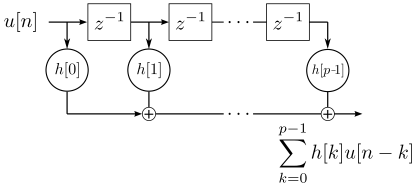
# Problema 1: identificación de un sistema [Kay, 1993]

- El problema consiste en identificar un sistema.
- Una estrategia es inyectar al sistema una entrada $u[n]$ conocida y observar la salida $x[n]$. A partir de estos datos, se intenta deducir los coeficientes del filtro.
- Se asume que la salida se observa contaminada con ruido blanco gaussiano $w[n]$, $w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Se asume como modelo que el sistema es un filtro FIR de orden $p$. Hay que identificar los coeficientes $h[i]$ con $i = 0,\, 1, \ldots, p-1$.

Modelo del problema




Modelo de $H(z)$: FIR



# Problema 1: identificación de un sistema

## Problema

Asumiendo que

- La entrada $u[n]$ está activa en $n = 0,\, 1, \dots, N-1$.
- La salida se observa en $n = 0,\, 1, \dots, N+p-2$.

Se pide:

1. Plantear el problema como un modelo lineal,
$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w},$$
especificando la matriz $\mathbf{H}$ y el vector $\boldsymbol{\theta}$.
2. Escribir el estimador óptimo $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y la matriz de covarianza del estimador $\mathbf{C}_{\hat{\theta}}$ en función de los parámetros del problema.
3. Calcular y dar una interpretación a $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ y a $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$.
4. Expresar el estimador óptimo y la matriz de covarianza en función de los resultados del punto anterior.
5. La varianza del estimador es función de la entrada de prueba $u[n]$. Encontrar la entrada que minimiza la varianza del estimador.

# Problema 1: identificación de un sistema

## 1. Planteo del problema como un modelo lineal

- La salida del sistema es,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{p-1} h[k]u[n-k] + w[n] \qquad n = 0,\, 1, \ldots, N+p-2$$

- En notación matricial queda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[p-2] \\ x[p-1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \\ x[N] \\ x[N+1] \\ \vdots \\ x[N+p-2] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u[0] & 0 & \cdots & 0 \\ u[1] & u[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[p-2] & u[p-3] & \cdots & 0 \\ u[p-1] & u[p-2] & \cdots & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-2] & u[N-3] & \cdots & u[N-p-1] \\ u[N-1] & u[N-2] & \cdots & u[N-p] \\ 0 & u[N-1] & \cdots & u[N-p+1] \\ 0 & 0 & \cdots & u[N-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[p-2] \\ w[p-1] \\ \vdots \\ w[N-2] \\ w[N-1] \\ w[N] \\ w[N+1] \\ \vdots \\ w[N+p-2] \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 2. Estimador óptimo y matriz de covarianza

Como el modelo es lineal en WGN, el estimador es MVU y eficiente.

El estimador MVU es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

La matriz de covarianza del estimador es

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}$$

## 3. Cálculo de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$

- Se expresa la matriz $\mathbf{H}$ en columnas como

$$\mathbf{H} = [\mathbf{u}[n]\ \mathbf{u}[n-1]\dots\mathbf{u}[n-p+1]]$$

donde

$$\mathbf{u}[n-i] = [\underbrace{0\ \dots 0}_{i}\ u[0]\dots u[N-1]\ \underbrace{0\dots 0}_{(p-1)-i}]^T \qquad 0 \leq i \leq p-1$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 3. Cálculo de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$ (cont)

- El elemento $(i,j)$ de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ es

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right]_{ij} &= \mathbf{u}^T[n-i]\mathbf{u}[n-j]\\ &= \sum_{n=0}^{N-1-|i-j|} u[n]u[n+|i-j|]\\ &= Nr_u[|i-j|],\end{aligned}$$

  donde

$$r_u[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} u[n]u[n+k]$$

  es la autocorrelación muestral de $u[n]$.

- Notar que

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right]_{ij} &= \left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right]_{ji} && \text{Es simétrica}\\ \left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right]_{ij} &= \left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right]_{i+k,j+k} && \text{Es Toeplitz}\end{aligned}$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 3. Cálculo de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$ (cont)

- Finalmente, $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ queda

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} = N\begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] & r[2] & \cdots & r_u[p-1] \\ r_u[1] & r_u[0] & r[1] & \cdots & r_u[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_u[p-2] & r_u[p-3] & \cdots & r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[p-1] & r_u[p-2] & \cdots & r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix} = N\mathbf{R}_u.$$

  $\mathbf{R}_u$ se llama matriz de autocorrelación de $u[n]$ de orden $p$.

- Por otro lado, el elemento $i$-ésimo de $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$ es

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}^T\mathbf{x}\right]_i &= \mathbf{u}^T[n-i]\mathbf{x}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u[n]x[n+i]\\ &= Nr_{ux}[i]\end{aligned}$$

$$r_{ux}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u[n]x[n+k]$$

es la correlación cruzada entre $u[n]$ y $x[n]$.

# Problema 1: identificación de un sistema

## 3. Cálculo de $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$ (cont)

- Finalmente, $\mathbf{H}^T\mathbf{x}$ queda

$$\mathbf{H}^T\mathbf{x} = N \begin{bmatrix} r_{ux}[0] \\ r_{ux}[1] \\ \vdots \\ r_{ux}[p-1] \end{bmatrix} = N\mathbf{r}_{ux}.$$

$\mathbf{r}_{ux}$ es vector de correlación cruzada entre $u[n]$ y $x[n]$.

## 4. Estimador óptimo y matriz de covarianza

El estimador MVU es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} \Longrightarrow$$

$$\hat{\boldsymbol{h}} = \mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{r}_{ux}$$

La matriz de covarianza es

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{C}_{\hat{h}} = \frac{\sigma^2}{N}\mathbf{R}_u^{-1}$$

Los coeficientes del filtro se obtienen multiplicando la matriz de autocorrelación inversa de la entrada con la correlación cruzada entre la entrada y la salida: Filtro de Wiener (retomaremos este punto más adelante en el curso).

# Problema 1: identificación de un sistema

## 5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- La matriz de covarianza del estimador es

$$\mathbf{C}_{\hat{h}} = \frac{\sigma^2}{N}\mathbf{R}_u^{-1}$$

  - La covarianza del estimador depende de la señal de entrada $u[n]$ a través de $\mathbf{R}_u$.
  - Se quiere encontrar $u[n]$ que minimize la varianza de los coeficientes $\hat{\mathbf{h}}$ del filtro.

- La varianza del coeficiente $i$-ésimo $\hat{h}[i]$ es

$$\text{var}(\hat{h}[i]) = \mathbf{C}_{\hat{h}ii} = \mathbf{e}_i^T\mathbf{C}_{\hat{h}}\mathbf{e}_i \qquad \mathbf{e}_i = [0\,0\ldots0 \underbrace{1}_{\text{posición } i} 0\ldots0\,0]^T$$

- Como $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ es simétrica y definida positiva, puede descomponerse como (descomposición de Cholesky),

$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} = \mathbf{D}^T\mathbf{D} \qquad \text{con } \mathbf{D} \text{ matriz } p\times p \text{ invertible}$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Notando que

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{I}\mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i)^2 = 1$$

  y definiendo

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\xi}_1 & = & \mathbf{D}\mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\xi}_2 & = & \mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i \end{array} \quad \Rightarrow \quad (\underbrace{\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^T}_{\boldsymbol{\xi}_1^T}\underbrace{\mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i}_{\boldsymbol{\xi}_2})^2 = (\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2)^2 = 1$$

- La desigualdad de Cauchy-Schwarz indica que para cualquier par de vectores $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$ en un espacio con producto escalar se cumple que

$$|\langle\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2\rangle|^2 \leq \langle\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1\rangle \cdot \langle\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2\rangle,$$

  y la igualdad se da si $\boldsymbol{\xi}_1 = c\boldsymbol{\xi}_2$ ($\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$ colineales). Si el producto escalar es el producto escalar estándar, la desigualdad se escribe como

$$(\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2)^2 \leq (\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_1)(\boldsymbol{\xi}_2^T\boldsymbol{\xi}_2).$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Se tiene que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_1 &= \mathbf{D}\mathbf{e}_i\\ \boldsymbol{\xi}_2 &= \mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i\end{aligned}\qquad\qquad (\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_1)(\boldsymbol{\xi}_2^T\boldsymbol{\xi}_2) \geq (\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2)^2 = 1.$$

- Sustituyendo

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_1)(\boldsymbol{\xi}_2^T\boldsymbol{\xi}_2) &= (\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^{T^{-1^T}}\mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i)\\ &= (\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{T^{-1}}\mathbf{e}_i)\\ &= (\mathbf{e}_i^T\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T\mathbf{C}_{\hat{h}}\mathbf{e}_i)\\ &\geq 1\end{aligned}$$

- Finalmente

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{C}_{\hat{h}}\mathbf{e}_i = \mathrm{var}(h[i]) \geq \frac{1}{\mathbf{e}_i^T\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}\mathbf{e}_i}$$

Para minimizar la varianza, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que cumplir con igualdad.

# Problema 1: identificación de un sistema

## 5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Imponiendo la condición de que $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$ sean colineales,

$$\boldsymbol{\xi}_1 = c_i \boldsymbol{\xi}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D}\mathbf{e}_i = c_i {\mathbf{D}^T}^{-1}\mathbf{e}_i \qquad \text{con } c_i \text{ una constante.}$$

  o equivalentemente, la condición para minimzar la varianza de todos los coeficientes es

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{e}_i = c_i\mathbf{e}_i, \qquad\qquad i = 1,\, 2\ldots, p.$$

- Teniendo en cuenta que $\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$, la condición queda

$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}\mathbf{e}_i = c_i\mathbf{e}_i, \qquad\qquad i = 1,\, 2\ldots, p,$$

  o en palabras, la columna $i$-ésima de $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ tiene solo un elemento no nulo $c_i$ en la posición $i$.

  La matriz de covarianza inversa $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ tiene que ser diagonal

# Problema 1: identificación de un sistema

## 5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Como
$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} = \frac{N}{\sigma^2}\mathbf{R}_u,$$
la matriz de autocorrelación de la entrada debe ser diagonal,
$$r_u[k] = 0 \qquad \forall k \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad u[n] \text{ ruido no correlacionado.}$$

- En esas condiciones, el estimador y su varianza son

| Estimador MVU | Varianza |
|---|---|
| $\hat{h}[i] = \dfrac{r_{ux}[i]}{r_u[0]}$ | $\mathrm{var}(\hat{h}[i]) = \dfrac{\sigma^2}{N r_u[0]}$ |

Los estimadores de los coeficientes son independientes.

# Problema 1: identificación de un sistema

## 6. Interpretación en el dominio de la frecuencia [Hayes, 1996]

La salida del filtro es

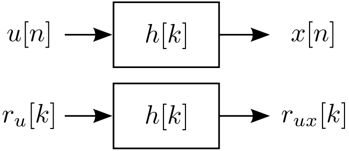
$$x[n] = (h * u)[n] = \sum_{l=0}^{p-1} h[l]u[n-l] \quad (1)$$

La correlación cruzada entre la entrada y la salida es

$$r_{ux}[k] = E(u[n]x[n+k]) \qquad (2)$$

Sustituyendo 1 en 2 se ve que

$$\begin{aligned} r_{ux}[k] &= E\left(u[n]\sum_{l=0}^{p-1} h[l]u[n+k-l]\right) \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} h[l]E(u[n]u[n+k-l]) \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} h[l]r_u[k-l] \\ &= (h * r_u)[k] \end{aligned}$$



# Problema 1: identificación de un sistema

## 6. Interpretación en el dominio de la frecuencia

- Aplicando al transformada de Fourier, se obtiene la densidad espectral de potencia cruzada entre la entrada y la salida,

$$r_{ux}[k] = (h * r_u)[k] \qquad \Rightarrow \qquad P_{ux}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})P_u(e^{j\omega})$$

- Si la entrada es ruido blanco, $r_u[k] = \sigma_u^2\delta[k]$,

$$P_{ux}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\sigma_u^2,$$

  por lo que un estimador de la respuesta en frecuencia del filtro es

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{P_{ux}(e^{j\omega})}{\sigma_u^2} = \frac{P_{ux}(e^{j\omega})}{r_u[0]}$$

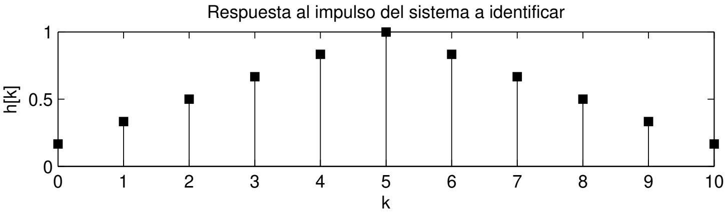
- En el dominio del tiempo, esta relación es

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{r}_{ux}}{r_u[0]}$$

# Problema 1: identificación de un sistema

## 7. Simulación

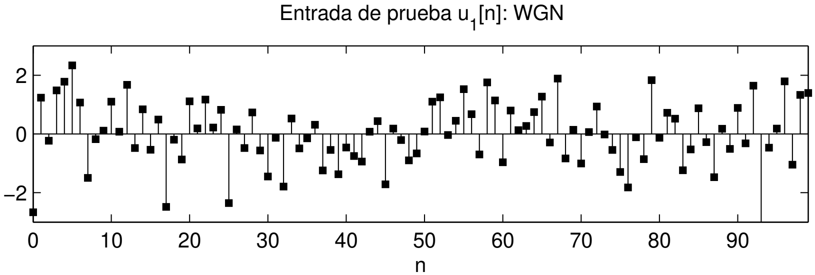
- La respuesta al impulso del sistema es triangular.

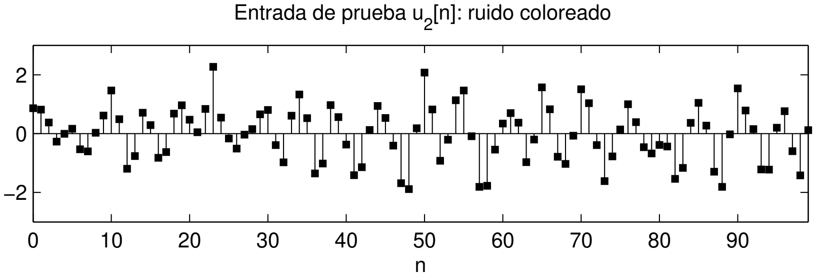



- Se usan dos señales $u[n]$ de prueba
  - Ruido blanco gaussiano
  - Diente de sierra
- La potencia $r_u[0]$ de las señales de prueba es unitaria.
- La potencia $\sigma^2$ del ruido $w[n]$ en las señales observadas $x[n]$ es también unitaria (SNR $=$ 0 dB).
- El largo de las señales de prueba es $N = 1000$ muestras.

# Problema 1: identificación de un sistema

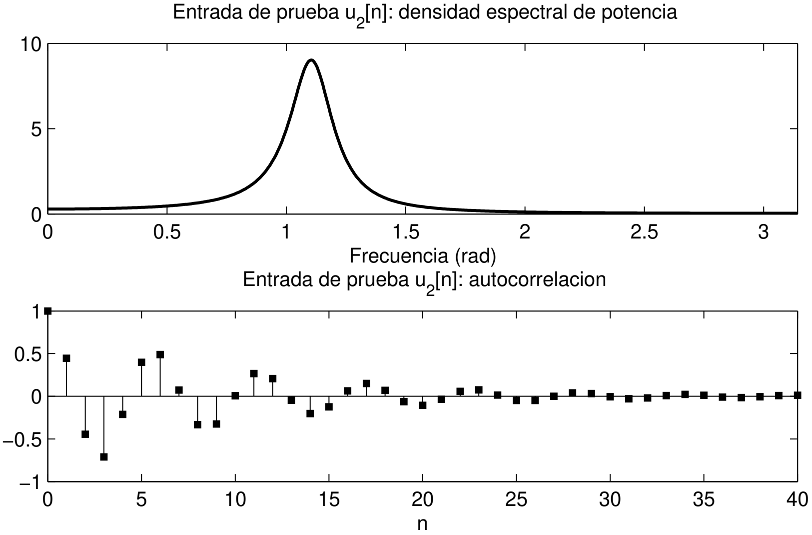
## 7. Simulación



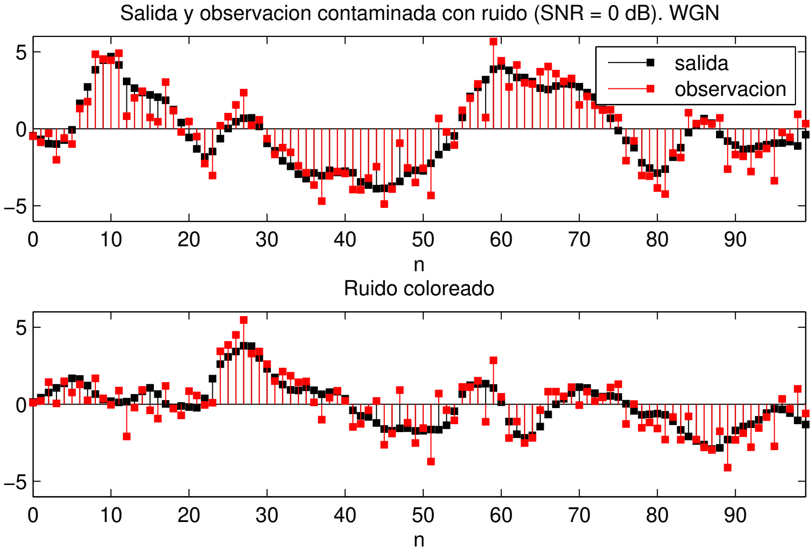
# Problema 1: identificación de un sistema

## 7. Simulación



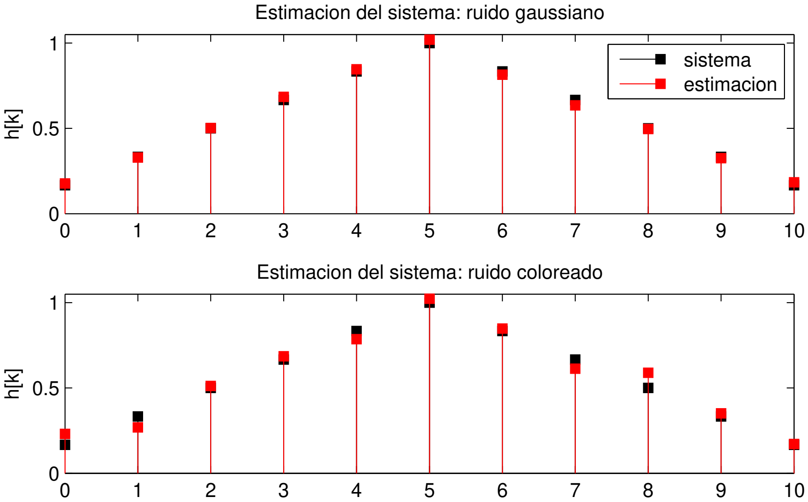
# Problema 1: identificación de un sistema

## 7. Simulación



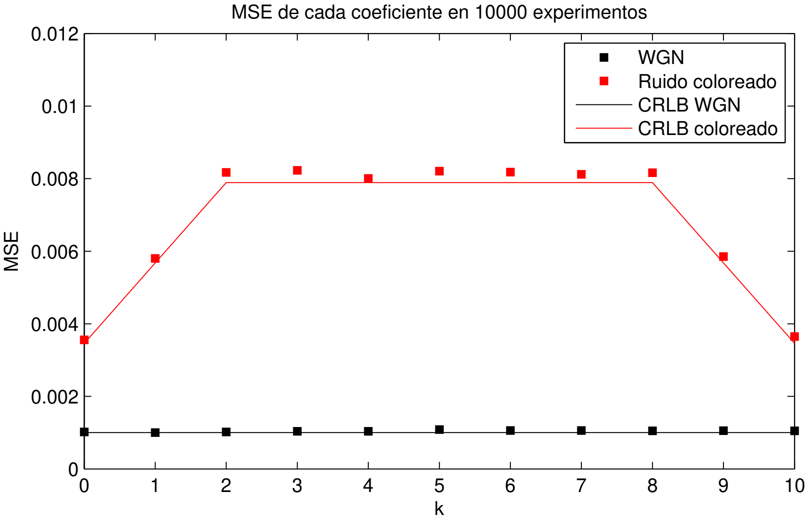
# Problema 1: identificación de un sistema

## 7. Simulación



# Problema 1: identificación de un sistema

## 7. Simulación



# Referencias I


Hayes, M. H. (1996).
*Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, chapter 3.
Wiley, 1st edition.

Kay, S. M. (1993).
*Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*, chapter 4.
Prentice Hall, 1st edition.