

Breve revisión de estabilidad de sistemas dinámicos

Estabilidad de Sistemas Eléctricos de Potencia

Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Primer semestre - 2022

Contenido

- 1 Puntos de equilibrio y estabilidad
- 2 Funciones de Lyapunov y teoremas de estabilidad
- 3 Sistemas lineales
- 4 Región de atracción
- 5 Linealización
- 6 Bifurcaciones

Sistemas dinámicos

Referencias: Nonlinear Systemas (H. Khalil), Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (J. Guckenheimer, P. Holmes), Mathematical Control Theory (E. Sontag).

- Manejamos objetos de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in \mathcal{R}^n \quad , \quad f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$$

- $f^t(x)$ denotará el tiempo t de la trayectoria que se inicia en x .
($f^0(x) = x$, $f^{t+s}(x) = f^t [(f^s(x))]$).
- Asumimos que se cumplen las condiciones para que existan las trayectorias para todo tiempo t real.
- Decimos que \bar{x} es un punto de equilibrio del sistema si $f(\bar{x}) = 0$

Estabilidad

Un punto de equilibrio \bar{x} es:

- Estable: "si las trayectorias que se inician suficientemente cerca de él se mantienen cerca de él en el futuro. Dado $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que si } \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|f^t(x) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- Asintóticamente estable: Además de la estabilidad, existe $\bar{\delta}$ de forma tal que si

$$\|x - \bar{x}\| < \bar{\delta} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f^t(x) - \bar{x}\| = 0$$

- Inestable, si no es estable

Funciones de Lyapunov

En 1892 Lyapunov caracterizó la estabilidad mediante la utilización de funciones de testeo que generalizan la noción de energía del sistema y la idea de que los puntos estables corresponden a mínimos locales de energía.

Diremos que $V : \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ es una función de Lyapunov si es definida positiva ($V(0) = 0$, $V(x) > 0$ si $x \neq 0$) y su derivada respecto de las trayectorias es semidefinida negativa

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} [V(f^t(x))] \right|_{t=0} = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall x$$

Teorema de estabilidad

Teorema

Si existe una función de Lyapunov, el origen es estable. Si además la derivada es definida negativa ($\dot{V}(x) < 0$ si $x \neq 0$) el origen es asintóticamente estable.

Comentarios:

- Determinar la estabilidad se traduce en encontrar una función de Lyapunov.
- Existen funciones *tipo* para amplias clases de sistemas.
- Existen resultados recíprocos (Por ejemplo: Massera, 1949).

Idea de la prueba

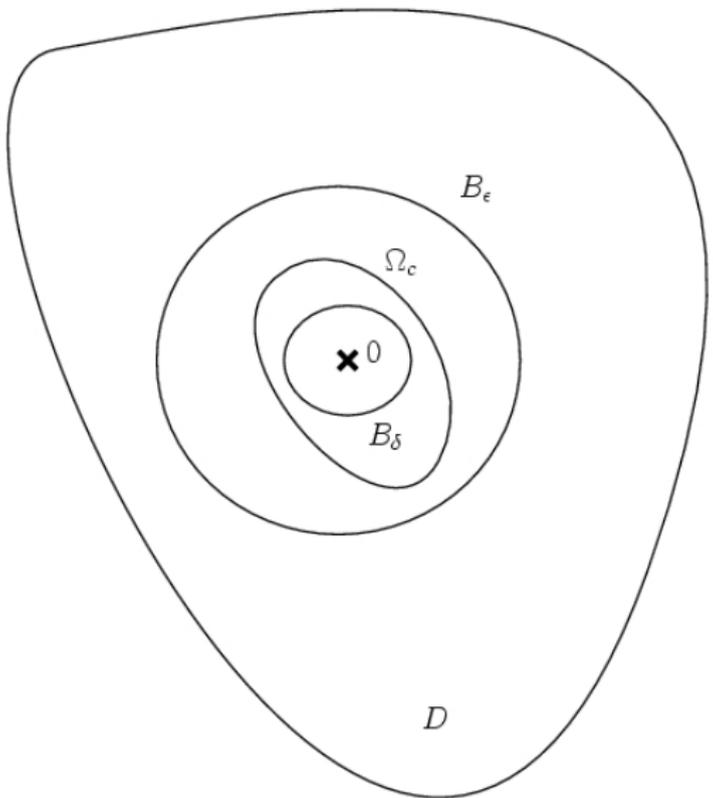
- La clave de la prueba es mostrar que una superficie de nivel del tipo

$$\Omega_c = \{x \mid V(x) = c\}$$

encierra una región positivamente invariante, que **captura** las trayectorias que entran en ella.

- Si $V(x) \leq c$, entonces $V(f^t(x)) \leq c$ para todo t positivo.
- Si la función es positiva, en 0 vale 0 y decrece estrictamente, entonces tiene que irse a 0.
- Si la función se va a cero, entonces las trayectorias van al origen.

Idea de la prueba



Sistemas Lineales

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x \in \mathcal{R}^n \quad , \quad A_{n \times n}$$

- La solución es $e^{At}x_0$, siendo x_0 la condición inicial.
- El origen $x = 0$ es un atractor $\Leftrightarrow \operatorname{re}(\lambda) < 0$ para todo λ valor propio de A (*Hurwitz*).

Matrices simétricas

Matrices definidas

Sea $M = M^T$ una matriz simétrica:

- **Definida positiva:** $M > 0$ si $x^T Mx > 0$ para todo $x \neq 0$.
- **Semi-definida positiva:** $M \geq 0$ si $x^T Mx \geq 0$ para todo $x \neq 0$.
- **Definida negativa:** $M < 0$ si $x^T Mx < 0$ para todo $x \neq 0$.
- **Semi-definida negativa:** $M \leq 0$ si $x^T Mx \leq 0$ para todo $x \neq 0$.
- **Indefinida:** si no es definida.

Relación con los autovalores

- Una matriz simétrica tiene todos sus autovalores reales.
- La definición de signo está directamente vinculada al signo de los autovalores (**Teorema Espectral**).

Sistemas Lineales

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad A_{n \times n}$$

- El sistema admite funciones de Lyapunov cuadráticas $V(x) = x^T P x$, con P simétrica definida positiva ($P = P^T > 0$).
- La derivada sobre las trayectorias es:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x$$

- Si llamamos $-Q = A^T P + P A$, podemos escribir $\dot{V}(x) = -x^T Q x$.
- Si $Q > 0$ entonces el origen es un atractor.

Ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -Q$

- Se prueba que dada $Q = Q^T > 0$, la ecuación tiene solución única $P^T = P > 0 \Leftrightarrow A$ es Hurwitz .
- Observar que alcanza con encontrar $P = P^T > 0$ tal que

$$A^T P + P A < 0 \quad (\text{LMI})$$

(desigualdad matricial lineal)

- Ambos problemas tienen eficiente resolución numérica.
- Matlab:
 - $X = \text{lyap}(A, Q)$ resuelve $A X + X A^T = -Q$.
 - $X = \text{lyap}(A^T, Q)$ resuelve $A^T X + X A = -Q$.

Región de atracción

Llamamos región (cuenca) de atracción del punto de equilibrio \bar{x} al conjunto

$$R = \left\{ x \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = \bar{x} \right\}$$

- A veces interesa que además de la estabilidad, R tenga un *tamaño razonable*.
- Es útil tener una estimación de R . Si $V : D \subset \mathcal{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ es una función de Lyapunov, entonces las curvas de nivel acotadas en D están dentro de la región de atracción.

$$\Omega_c = \{x/V(x) < c\}$$

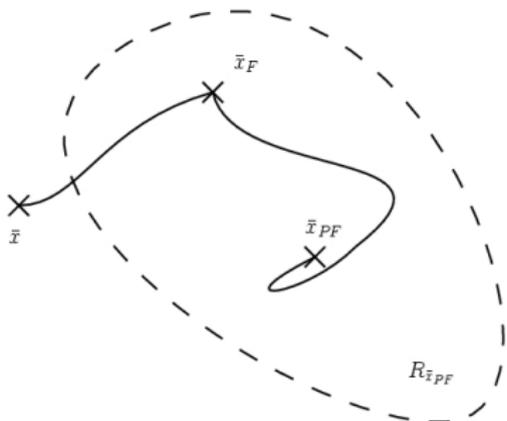
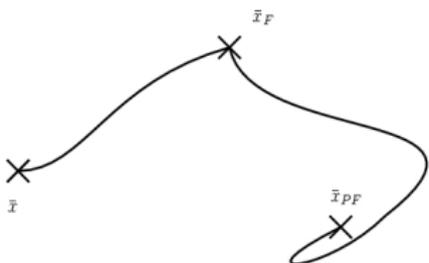
Aplicación

- Supongamos que la ecuación diferencial $\dot{x} = f_N(x)$ describe el funcionamiento de un sistema en situación normal, operando en un punto de equilibrio estable \bar{x}_N .
- Supongamos que se produce una falta. La dinámica del sistema pasa a estar regida por $\dot{x} = f_F(x)$, con condición inicial \bar{x}_N . Esta falta es *limpiada* en el instante t_C .
- Al limpiarse la falta, el sistema pasa a operar según la ecuación $\dot{x} = f_{PF}(x)$, que tiene asociado un punto de operación estable \bar{x}_{PF} . La condición inicial será el punto $f_F^{t_C}(\bar{x}_N)$.

Aplicación

- Si todo marcha bien, el sistema tenderá a operar en el punto \bar{x}_{PF} .
- Para ello, el punto $f_F^{t_C}(\bar{x}_N)$ deberá pertenecer a la cuenca de atracción de \bar{x}_{PF} .

Aplicación



Teorema de Hartman-Grobman

Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ tal que

$$Df(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}}$$

no tiene valores propios con parte real nula. Entonces existe una función continua, con inversa continua (un *homeomorfismo*) definido en un entorno de \bar{x} , que mapea las órbitas del sistema original en las órbitas del sistema lineal

$$\dot{z} = Df(\bar{x}) \cdot z \quad , \quad z = x - \bar{x}$$

Este homeomorfismo preserva el sentido de las trayectorias y preserva el tiempo.

Linealización

$$\dot{x} = f(x) , \quad f(0) = 0 , \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

El sistema lineal $\dot{x} = Ax$ *aproxima* al original en un entorno del punto de equilibrio.

- Si A es Hurwitz, el origen es un atractor del sistema no lineal y cualquier función cuadrática $V(x) = x^T P x$ con $P > 0$ y $A^T P + P A < 0$ es de Lyapunov.
- Si existe al menos un valor propio de A con parte real positiva, entonces el sistema no lineal es inestable.
- Si los autovalores de A están en el semiplano izquierdo y al menos uno está sobre el eje imaginario, entonces no podemos afirmar nada sobre el sistema no lineal.

Ejemplo

La linealización del sistema

$$\ddot{x} + \epsilon x^2 \dot{x} + x = 0$$

en torno al origen da la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

de autovalores $\pm j$, por lo que el origen no es un atractor para el sistema lineal. Sin embargo lo es para el sistema no lineal, para $\epsilon > 0$ (usar $V(x) = x^2 + \dot{x}^2$ como candidata a función de Lyapunov).

Ejemplo

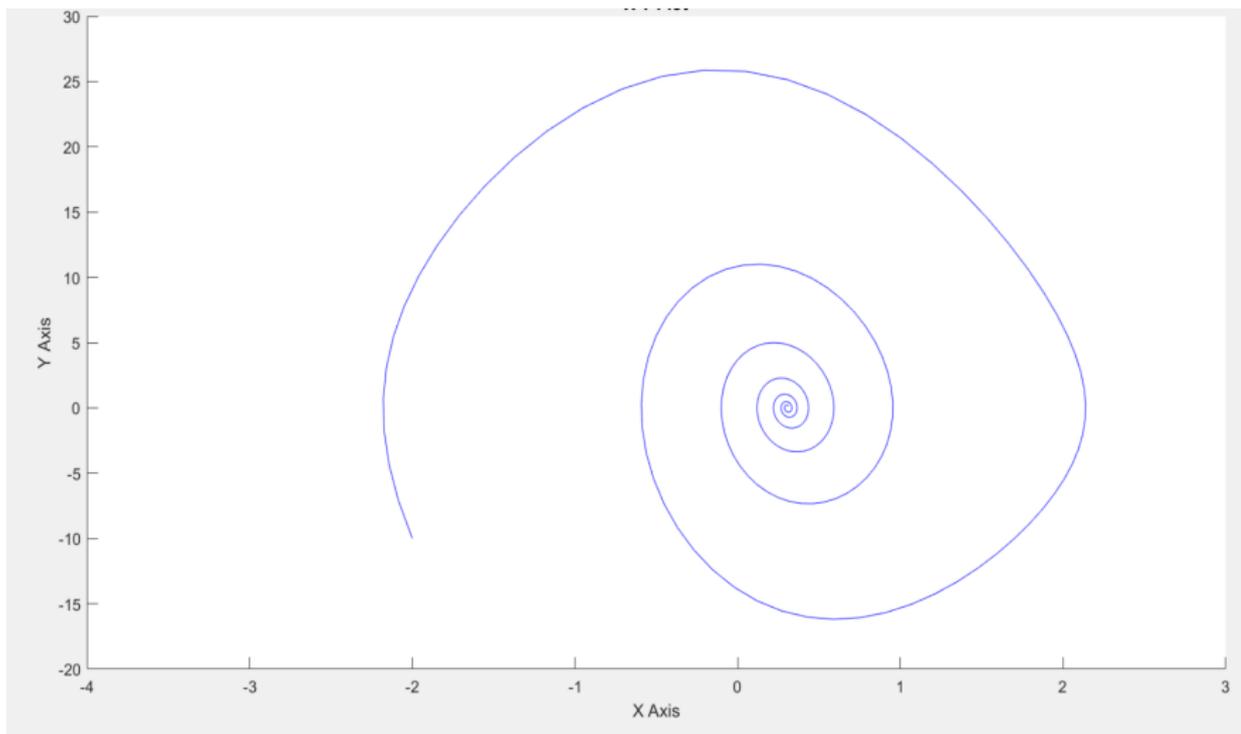
$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} &= \omega \\ M \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -D\omega + P_m - P_e \sin(\delta) \end{cases}$$

- $[\delta_e, 0]^T$ es un punto de equilibrio $[P_m = P_e \cdot \sin(\delta_e)]$, con $0 < \delta_e < \frac{\pi}{2}$.
- La linealización da

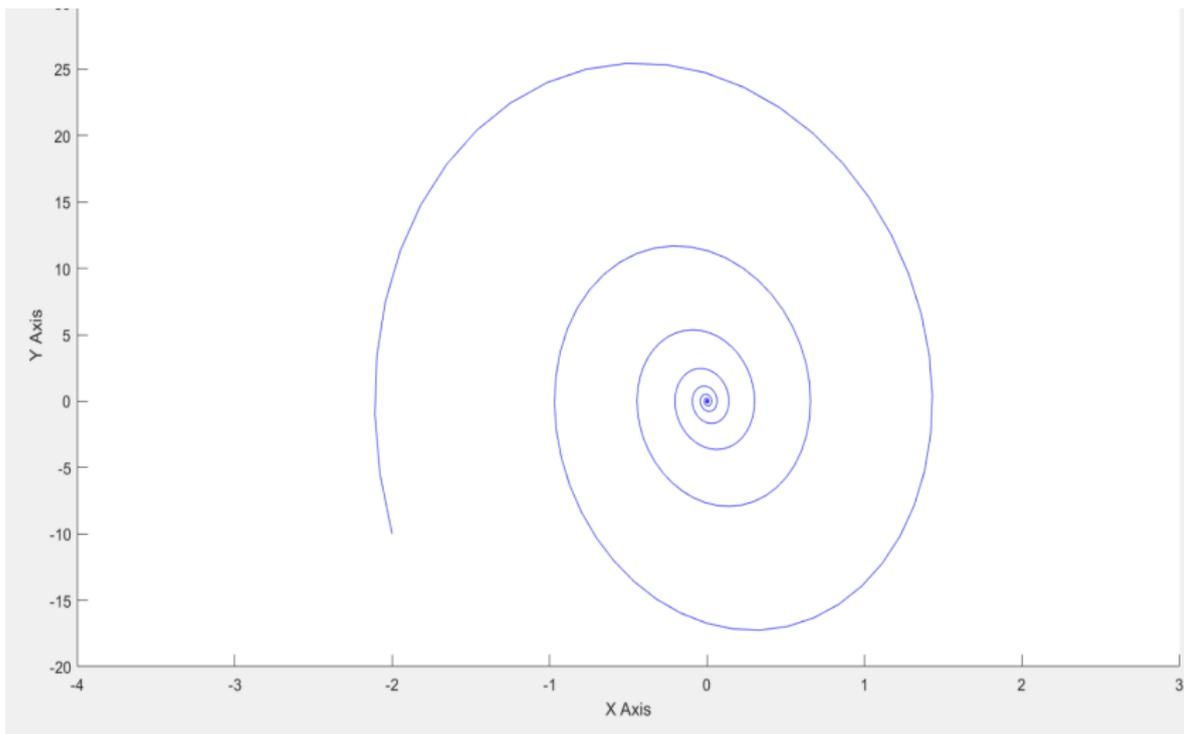
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-P_e \cdot \cos(\delta_e)}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}$$

- $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{D}{M} \cdot \lambda + \frac{P_e}{M} \cdot \cos(\delta_e)$: tiene raíces con parte real negativa.

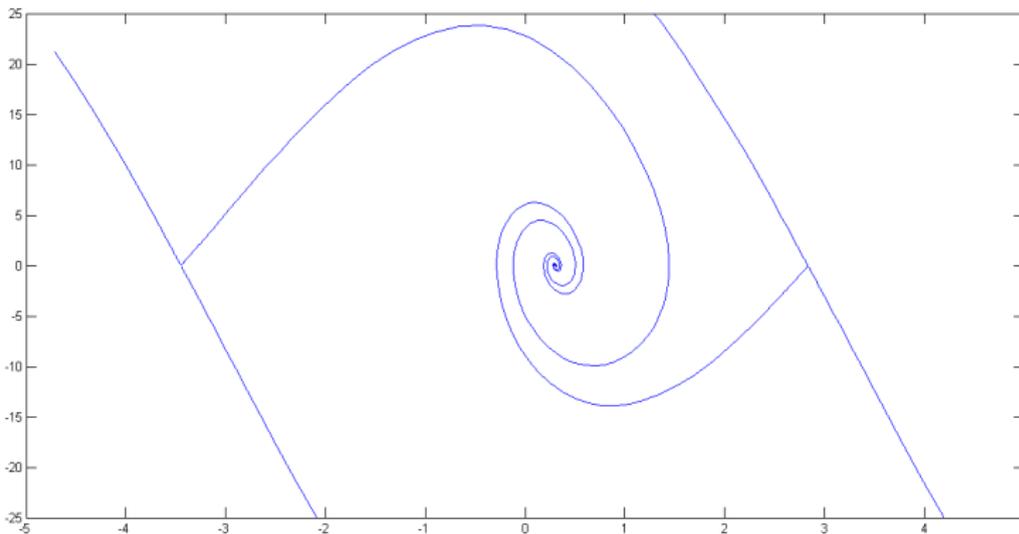
Sistema no lineal

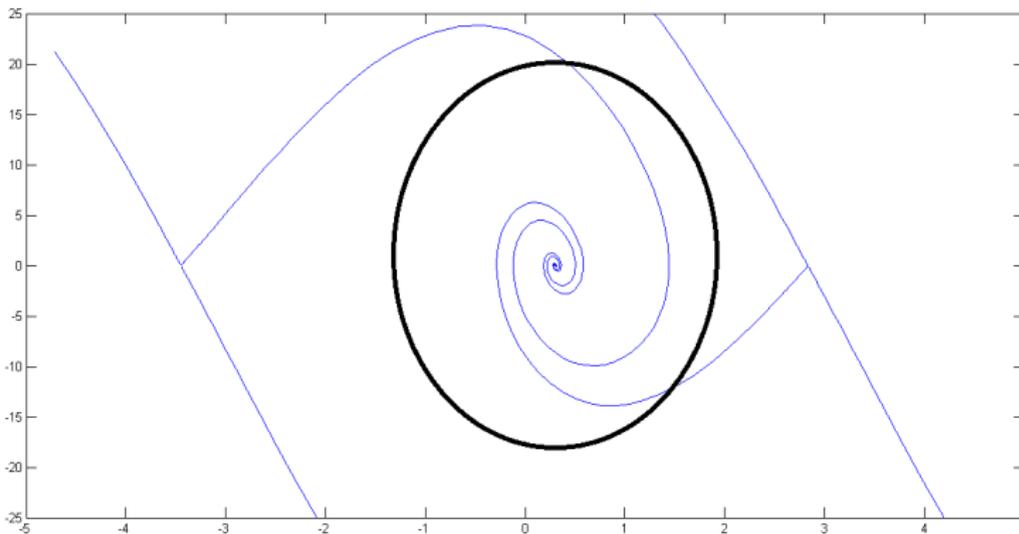


Sistema linealizado



- Sea $P = P^T > 0$ tal que $V(x) = x^T P x$.
- Las elipses $x^T P x = c$ contenidas en el dominio de definición de V están dentro de la región de atracción





Bifurcaciones

Supongamos que nuestro sistema depende de un parámetro escalar

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad \lambda \in \mathcal{R}$$

(x representa el estado y λ representa una característica del sistema que asumimos constante, o que varía *cuasiestáticamente*).

Decimos que hay una bifurcación si el comportamiento del sistema cambia **cualitativamente** al alcanzar λ un valor crítico.

Ejemplo

Consideremos el sistema escalar

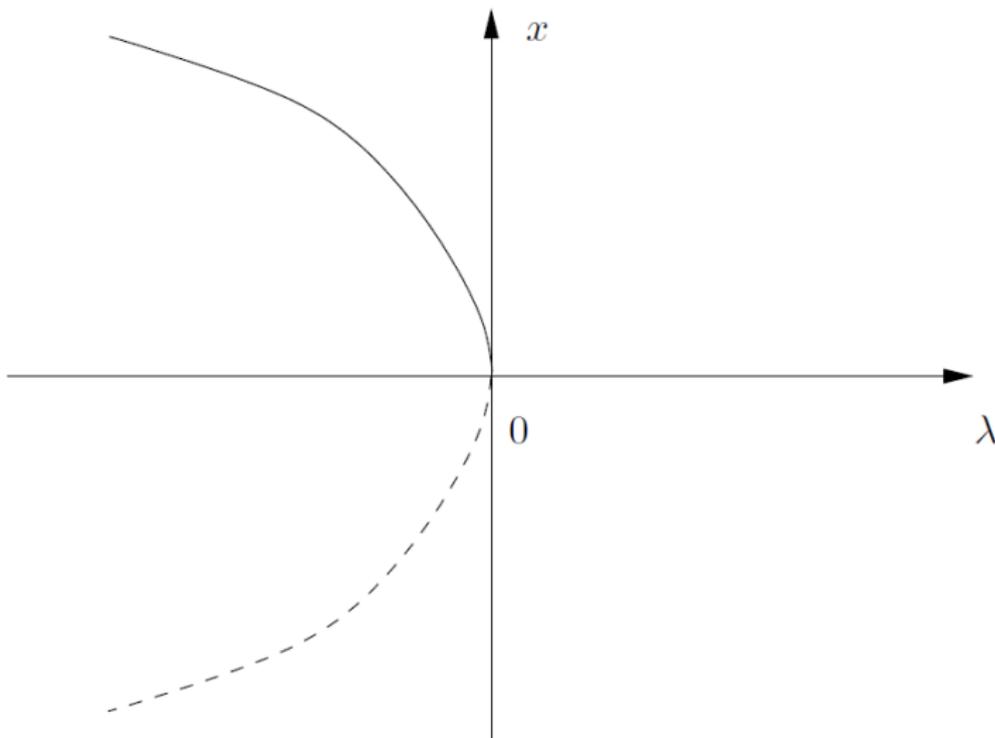
$$\dot{x} = x^2 + \lambda$$

- si $\lambda < 0$, $x = \pm\sqrt{-\lambda}$ son los dos equilibrios del sistema.
- si $\lambda = 0$, $x = 0$ es el único equilibrio.
- si $\lambda > 0$ el sistema no tienen puntos de equilibrio.

A esta situación la llamamos *bifurcación silla-nodo*.

Normalmente se dice que la pareja $(x = 0, \lambda = 0)$ es un punto de bifurcación.

Diagrama de bifurcación



- El Teorema de Hartman-Großman nos dice que si el punto de equilibrio tiene autovalores con parte real no nula, entonces el sistema se comporta *como su aproximación lineal*.
- Lo que hay que mirar entonces es si pequeñas variaciones del parámetro implican un cambio en el signo de la parte real de los autovalores.

Tipos de bifurcación

Para determinar si un punto de equilibrio es un punto de bifurcación tenemos que mirar cuando el Jacobiano tiene autovalores en el eje imaginario.

- Si aparece un autovalor nulo: bifurcación silla-nodo (asociada a la estabilidad de tensión), pitchfork, transcítica.
- Si hay un par de autovalores complejos conjugados en el eje imaginario: bifurcación de Hopf (asociada a un comportamiento oscilatorio).

Teorema de Sotomayor, 1973

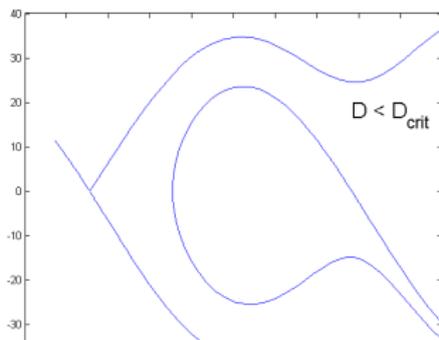
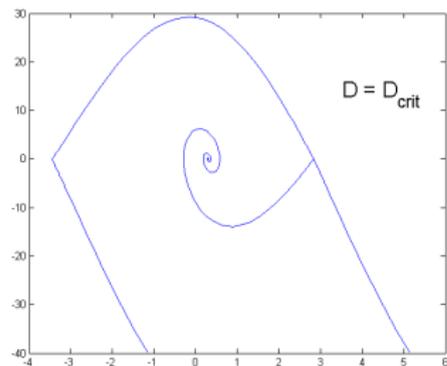
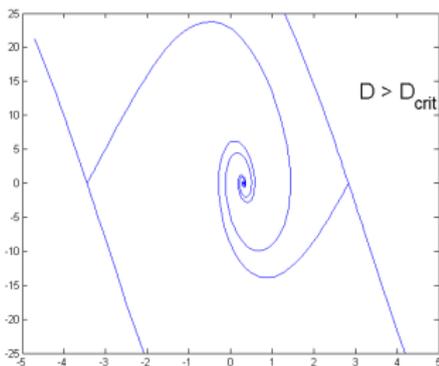
La pareja (x_0, λ_0) es un punto de bifurcación silla nodo si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1 $f(x_0, \lambda_0) = 0$ (pto. de eq.).
- 2 $w^T D_x f(x_0, \lambda_0) = 0$ (autovalor nulo de vector propio izquierdo w).
- 3 $w^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) \neq 0$ (transversalidad).
- 4 $w^T [D_{xx}^2 f(x_0, \lambda_0)] v \neq 0$ (v vector propio derecho).

Las últimas dos condiciones son de *genericidad* (robustez), e implican que este tipo de bifurcación es el *esperable* cuando aparece un autovalor nulo.

Se extiende al caso de parámetro vectorial.

Ejemplo de bifurcación global



FIN