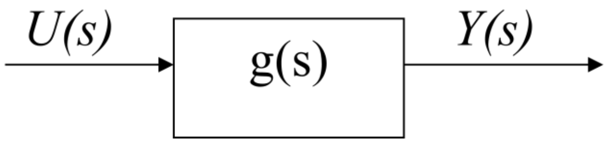
7 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA – SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Introducción

Trabajar en el dominio de Laplace no solamente es útil para la resolución matemática de ecuaciones sino que se presta especialmente para ser utilizado con el concepto de *función de transferencia*. En general un proceso recibe entradas $u(t)$ y genera salidas $y(t)$. Si llevamos estas señales al dominio de Laplace tendremos entradas $U(s)$ que generan salidas $Y(s)$. La función que relaciona salida con entrada se denomina función de transferencia $g(s)$. Si representamos el proceso con un rectángulo que corresponde a la transformación $g(s)$, se tiene



De modo que $Y(s) = g(s) \times U(s)$.

Sistemas de primer orden

Se denominan sistemas de primer orden a aquellos en los que en la ecuación general aparece solamente la derivada primera de la variable de estado. O sea que se reducen al formato siguiente:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = k\ u$$

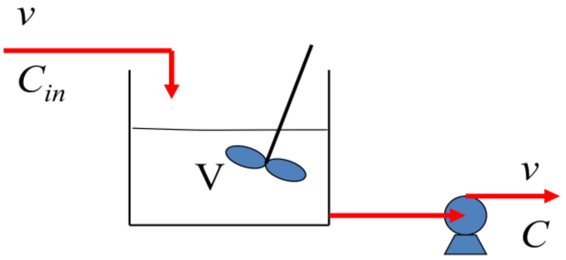
donde u e y son las variables desviación de entrada y salida, k se denomina ganancia del proceso (es la relación entre salida y entrada cuando se extinguió la perturbación) y τ es la constante de tiempo del sistema.

Como la ecuación está escrita en las variables “desviación” respecto al valor de estado estacionario, por lo tanto en general $y(0) = 0$, $u(0) = 0$. Tomando transformadas de Laplace

$$\tau\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = kU(s)$$
$$\tau sY(s) + Y(s) = kU(s)$$
$$(\tau s + 1)Y(s) = kU(s)$$
$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}U(s)$$
$$Y(s) = g(s)U(s)$$

$$\boxed{g(s) = \frac{k}{\tau s + 1}}$$

Veamos un ejemplo de sistema de primer orden: un tanque completamente agitado que recibe una corriente de concentración C_{in} y caudal v y se le extrae el mismo caudal:



Del balance de materia

$$\frac{d(VC)}{dt} = vC_{in} - vC$$

Como V es constante porque entra y sale el mismo caudal

$$\frac{dC}{dt} = \frac{v}{V}C_{in} - \frac{v}{V}C$$

Estado estacionario: $dC/dt = 0$; $C_s = C_{in}$. Por lo tanto

$$\frac{d(C - C_s)}{dt} = \frac{v}{V}\left(C_{in} - C_{in\ s}\right) - \frac{v}{V}(C - C_s)$$

$$\frac{V}{v}\frac{d(C - C_s)}{dt} + (C - C_s) = \left(C_{in} - C_{in\ s}\right)$$

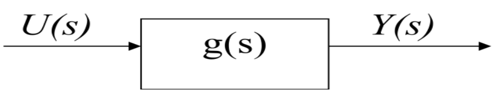
Que es de la forma

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = k\ u$$

donde $\tau = V/v$, $y = C - C_s$, $u = C_{in} - C_{in\ s}$

<u>Respuestas de sistemas de primer orden a diferentes entradas</u>

Seguimos manejándonos con el esquema



donde

$$g(s) = \frac{k}{\tau\ s + 1}$$

<u>Escalón</u> de magnitud ΔU a tiempo $t = 0$

Sabemos que

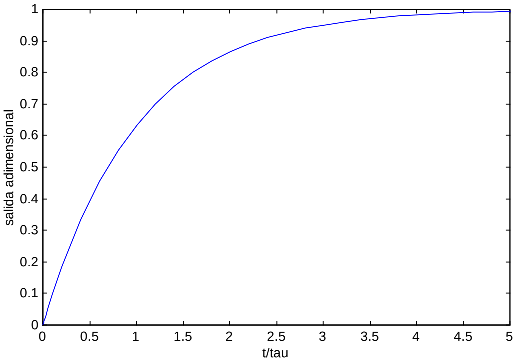
$$\mathcal{L}[\Delta U] = \frac{\Delta U}{s}$$

Por lo tanto $$Y(s) = \frac{k \ \Delta U}{s(\tau s + 1)}$$

Tomando antitransformadas $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(\tau s+1)}\right] = 1 - e^{-t/\tau}$$

O bien $$\boxed{y(t) = k\Delta U\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$$

Que escrito en forma adimensional es $$\frac{y(t)}{k\Delta U} = \left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$



Por ejemplo: consideremos un tanque de V = 5m^3 con v = 1 m^3/min, concentración en estado estacionario 1.25 mol/m^3. Considerar un cambio en la concentración de entrada desde 1.25 mol/m^3 a 1.75 mol/m^3.

ΔU = 0.5 mol/m^3

τ = 5 min

$$U(s) = \frac{\Delta U}{s} = \frac{0.5}{s}$$

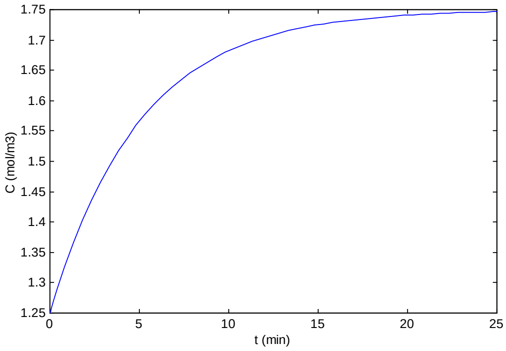
$$Y(s) = \frac{1}{5s+1}\frac{0.5}{s}$$

Por lo tanto la respuesta en el dominio del tiempo será

$$y(t) = 0.5\left[1 - e^{-t/5}\right]$$

Siendo y la variable desviación por lo que la concentración en el tanque será

$$C(t) = 1.25 + 0.5\left[1 - e^{-t/5}\right]$$



Ver ‘ejem7.1’ y ‘ejem7.1.xcos’ (este último en Xcos de Scilab).

Conociendo la respuesta de una función de primer orden a un escalón en la entrada se pueden estimar los parámetros de la función de transferencia del proceso:

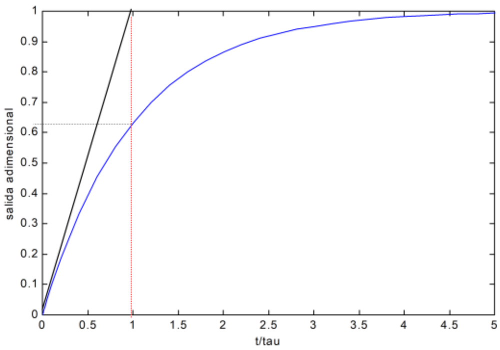
Estimación de la ganancia: $$k = \left.\frac{y(t)}{\Delta U}\right|_{t\to\infty} = \frac{\Delta y}{\Delta U}$$

O bien $$k = \lim_{s\to 0} g(s)$$

Estimación de la constante de tiempo:

Identificando el valor de tiempo en el cual la respuesta vale 0.632 del valor final:

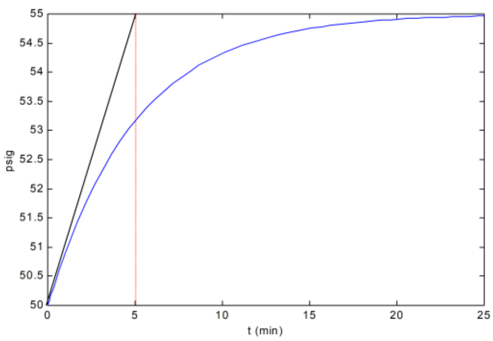
$$y(\tau) = k\ \Delta U\left[1-e^{-1}\right] = 0.632\ \ k\ \Delta U$$



O bien evaluando $$\frac{dy}{dt} = \frac{k\Delta U}{\tau}\left[e^{-t/\tau}\right]$$

en $t = 0$ $$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{k\Delta U}{\tau}$$

Ejemplo: El operador de un proceso realiza un cambio en el caudal de entrada pasando de 20 a 17.5 gal/min y encuentra que la presión cambia de 50 a 55 psig como se muestra en la figura.



$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{(55-50)psig}{(17.5-20)gpm} = -2\ psig/gpm$$

$$y(\tau) = k\ \Delta U\left[1 - e^{-1}\right] = 0.632\ \ k\ \Delta U$$

$$P = 50 + 0.632 \times 5 = 53.2\,psig$$
$$\tau = 5\min$$

<u>Impulso</u> $\mathcal{L}[A\delta] = A$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} U(s)$$

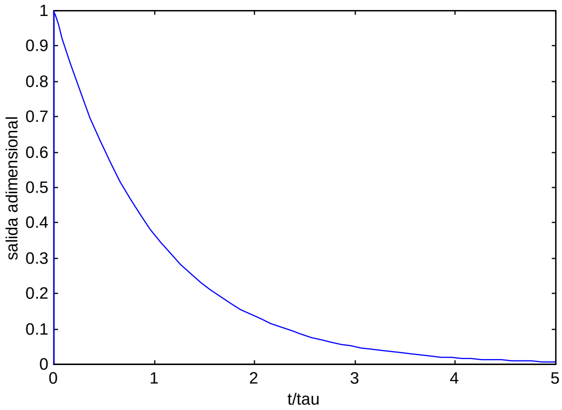
$$Y(s) = \frac{k\ A}{\tau s + 1}$$

$$\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{\tau s + 1}\right] = e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{y(t) = k\ \ A\ e^{-t/\tau}}$$

O en forma adimensional

$$\frac{y(t)}{kA} = e^{-t/\tau}$$



<u>Procesos autorregulados</u>

Son aquellos en los cuales un cambio en las variables de entrada conduce a un nuevo estado estacionario en forma automática. Por ejemplo los sistemas de primer orden.

Veamos un ejemplo: un RCAI con una reacción química de primer orden $r = k\,C$
Del balance de masa

$$\frac{d(VC)}{dt} = vC_{in} - vC - kVC$$

$$\frac{dC}{dt} = -\left(\frac{v}{V} + k\right)C + \frac{v}{V}C_{in}$$

En estado estacionario $dC/dt = 0$

$$C_s = \frac{\frac{v}{V}C_{in\ s}}{\frac{v}{V} + k}$$

Restando la ecuación de balance en estado estacionario

$$\frac{d(C-C_s)}{dt}=-\left(\frac{v}{V}+k\right)(C-C_s)+\frac{v}{V}\left(C_{in}-C_{in\ s}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\frac{v}{V}+k}\right]\frac{d(C-C_s)}{dt}+(C-C_s)=\left(\frac{\frac{v}{V}}{\frac{v}{V}+k}\right)\left(C_{in}-C_{in\ s}\right)$$

Que es de la forma $\tau\frac{dy}{dt}+y=k\,u$

con

$$\tau=\left[\frac{1}{\frac{v}{V}+k}\right] \qquad k=\left[\frac{\frac{v}{V}}{\frac{v}{V}+k}\right]=\frac{1}{1+\frac{V}{v}k}$$

$$y=C-C_s \qquad u=C_{in}-C_{in\ s}$$

Véase ‘ejem7.2’.

Otro ejemplo: RCAI con reacción química de 2º orden $r = k\,C^2$

$$\frac{d(VC)}{dt}=vC_{in}-vC-k_2VC^2$$

$$\frac{dC}{dt}=\frac{v}{V}C_{in}-\frac{v}{V}C-k_2C^2$$

En estado estacionario $dC/dt = 0$ $\qquad k_2C_s^{\ 2}+\frac{v}{V}C_s-\frac{v}{V}C_{in\ s}=0$

$$C_s=\frac{-\frac{v}{V}+\sqrt{\left(\frac{v}{V}\right)^2+4k_2\left(\frac{v}{V}\right)C_{in\ s}}}{2k_2}$$

Si linealizamos la función $\quad \frac{d(C-C_s)}{dt}\approx\left.\frac{\partial f}{\partial C}\right|_s(C-C_s)+\left.\frac{\partial f}{\partial C_{in}}\right|_s\left(C_{in}-C_{in\ s}\right)$

$$\left[\frac{1}{\frac{v}{V}+2k_2C_s}\right]\frac{d(C-C_s)}{dt}+(C-C_s)=\left(\frac{\frac{v}{V}}{\frac{v}{V}+2k_2C_s}\right)\left(C_{in}-C_{in\ s}\right)$$

Que también es de la forma $\tau\frac{dy}{dt}+y=k\,u$

con

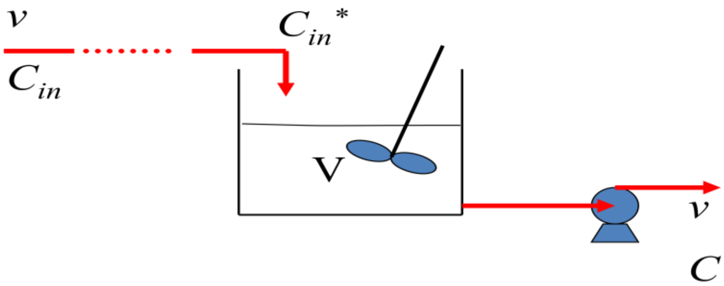
$$\tau=\left[\frac{1}{\frac{v}{V}+2k_2C_s}\right]=\left[\frac{\frac{v}{V}}{1+2k_2C_s\frac{v}{V}}\right] \qquad k=\left[\frac{\frac{v}{V}}{\frac{v}{V}+2k_2C_s}\right]=\frac{1}{1+2k_2C_s\frac{V}{v}}$$

$$y=C-C_s \qquad u=C_{in}-C_{in\,s}$$

Ver 'ejem7.3'.

Sistemas de primer orden más tiempo muerto

Muchas veces en los procesos industriales se introducen tiempos muertos; particularmente en la industria de procesos suelen asociarse al transporte de fluidos por cañerías. Por ejemplo, en el siguiente esquema, si se produce un cambio en la concentración de entrada C_{in} puede demorar un cierto tiempo θ en que dicho cambio llegue a la entrada del tanque.



La forma general de estos procesos (primer orden con tiempo muerto) será

$$\tau\frac{dy}{dt}+y=k\;u(t-\theta)$$

Y en el ejemplo que estamos viendo será $\theta = V_{\text{tubería}} / v$ por lo que $C_{in}^{*}(t)=C_{in}(t-\theta)$

Del balance de masa en el tanque $\frac{dC}{dt}=-\frac{v}{V}C+\frac{v}{V}C_{in}^{*}$

$$\frac{dC}{dt}=-\frac{v}{V}C+\frac{v}{V}C_{in}(t-\theta)$$

Llamando $u = C_{in} - C_{in\,s}$, $y = C - C_s$, $\tau = V/v$ y tomando transformadas

$$\tau[sY(s)-y(0)]+Y(s)=k\;e^{-\theta s}U(s)$$

$$\tau sY(s)+Y(s)=k\;e^{-\theta s}U(s)$$

$$(\tau s+1)Y(s)=k\;e^{-\theta s}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{k\;e^{-\theta s}}{\tau s+1}U(s)$$

$$Y(s)=g(s)U(s)$$

$$\boxed{g(s)=\frac{k\;e^{-\theta\,s}}{\tau\;s+1}}$$

Si en un proceso de primer orden con tiempo muerto hay un cambio en escalón de magnitud ΔU a tiempo $t = 0$

$$\mathcal{L}[\Delta U] = \frac{\Delta U}{s}$$

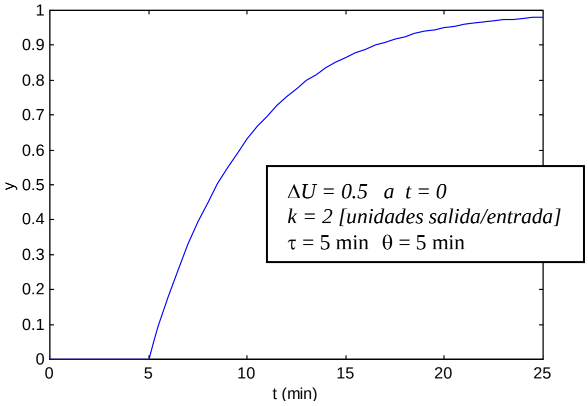
$$Y(s) = \frac{k\ e^{-\theta s}}{\tau s + 1} \frac{\Delta U}{s}$$

$$Y(s) = \frac{k\ \Delta U\ e^{-\theta s}}{s(\tau s + 1)}$$

antitransformando

$$y(t) = 0 \qquad para \quad 0 \le t \le \theta$$

$$y(t) = k\Delta U\left[1 - e^{-(t-\theta)/\tau}\right] \qquad para \quad t \ge \theta$$



Procesos integradores

Veamos el siguiente ejemplo: sea un tanque de almacenamiento, con área transversal 100 ft^2 , inicialmente está entrando y saliendo el caudal $v_{in} = v_{out} = 5$ ft^3/min , $h_0 = 4$ ft , H tanque = 10 ft . A la 1:00 pm el flujo de entrada se cambia a 6 ft^3/min.

Del balance global de masa $\qquad \dfrac{dV}{dt} = v_{in} - v_{out}$

Y como el área transversal es constante $\qquad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{A} v_{in} - \dfrac{1}{A} v_{out}$

Restando la solución de estado estacionario $\qquad \dfrac{d(h - h_s)}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(v_{in} - v_{in\ s}\right) - \dfrac{1}{A}\left(v_{out} - v_{out\ s}\right)$

Si el flujo de salida es constante $\qquad \dfrac{d(h - h_s)}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(v_{in} - v_{in\ s}\right)$

Que es de la forma $\qquad \dfrac{dy}{dt} = k\ u$

si llamamos $\qquad y = h - h_s \quad k = 1/A \quad u = v_{in} - v_{in\ s}$

Tomando tranformadas

$$sY(s) - y(0) = kU(s) \qquad\qquad y(0) = 0$$

$$Y(s) = \frac{k}{s}U(s)$$

$$Y(s) = k\frac{\Delta u}{s^2}$$

$$y(t) = k\ \Delta u\ t$$

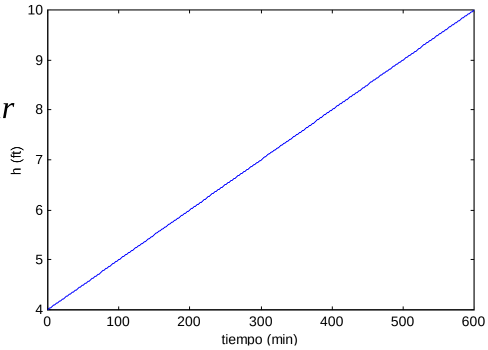
antitransformando

$$h - h_s = \frac{1}{A}\Delta v_{in} t$$

$$h = 4\,ft + \frac{(6-5)\,ft^3/\min}{100\,ft^2}t$$

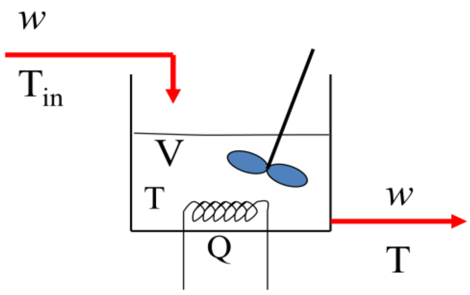
Resolviendo por ejemplo para h = 10 ft

$$t = (10\,ft - 4\,ft)\frac{100\,ft^2}{(6-5)\,ft^2/\min} = 600\min = 10hr$$



Procesos caracterizados por más de una variable

Cuando un proceso está caracterizado por más de una variable de estado, la(s) salida(s) puede(n) estar dada(s) por varias funciones de transferencia. Consideremos por ejemplo un tanque agitado calentado eléctricamente, a caudal constante.



Del balance de energía $\qquad V\rho C\dfrac{dT}{dt} = wC(T_{in} - T) + Q$

Si el proceso estaba inicialmente en estado estacionario $\qquad 0 = wC(T_{in,s} - T_s) + Q_s$

Entonces

$$V\rho C\frac{dT}{dt} = wC\left[(T_{in} - T_{in,s}) - (T - T_s)\right] + (Q - Q_s)$$

$$\frac{V\rho}{w}\frac{d(T-T_s)}{dt} = (T_{in}-T_{in,s})-(T-T_s)+\frac{1}{wC}(Q-Q_s)$$

O escribiendo en variables desviación $\frac{V\rho}{w}\frac{dT'}{dt} = T_{in}{}' - T' + \frac{1}{wC}Q'$

El término ***Vρ/w*** tiene unidades de tiempo y puede llamarse τ , la constante de tiempo del sistema.

A su vez ***1/wC*** puede denominarse ***K***, la ganancia del sistema, pues relaciona la variable de entrada con la de salida en estado estacionario: $T' = T_{in}{}' + \frac{1}{wC}Q' \quad en \quad e.e.$

O sea que escribimos $\boxed{\tau\frac{dT'}{dt} = T_{in}{}' - T' + K\ Q'}$

Tomando transformadas y como *T'(0)=0*

$$\tau\ L\left[\frac{dT'}{dt}\right] = L\left[T_{in}{}' - T' + KQ'\right]$$

$$\tau\ s\ \mathrm{T}(s) = \mathrm{T_{in}}(s) - \mathrm{T}(s) + K\mathrm{Q}(s)$$

$$\boxed{\mathrm{T}(s) = \left(\frac{K}{\tau\ s+1}\right)\mathrm{Q}(s) + \left(\frac{1}{\tau\ s+1}\right)\mathrm{T_{in}}(s)}$$

$$\boxed{\mathrm{T}(s) = \mathrm{G_1}(s)\mathrm{Q}(s) + \mathrm{G_2}(s)\mathrm{T_{in}}(s)}$$

Para concretar más el ejemplo, supongamos que el tanque agitado es de 1.60 ft^3, opera con un flujo de 200 lb/min de un líquido con C = 0.32 Btu/lbºF y ρ = 62.4 lb/ft^3. Se ha alcanzado el estado estacionario con un flujo de calor de 1920 Btu/min y una temperatura de entrada de 70ºF. Calcular la respuesta de un sistema frente a un cambio súbito de la temperatura de entrada a 90ºF.

Como el Q se mantiene constante sólo debemos ocuparnos de hallar la $G_2(s)$, relacionada con T_{in}

$$\tau = \frac{V\rho}{w} = \frac{1.60\,ft^3 \times 62.4\,lb/ft^3}{200\,lb/\min} = 0.5\min$$

Entonces

$$G_2(s) = \frac{1}{0.5s+1}$$

Debemos escribir las ecuaciones en variables desviación. Para ello calculamos la temperatura de estado estacionario:

$$T_s = T_{in,s} + \frac{Q_s}{w_s C} = 70^{o}F + \frac{1920\,Btu/\min}{200\,lb/\min \times 0.32\,Btu/lb.^{o}F} = 100^{o}F$$

la señal de entrada en forma de escalón es:

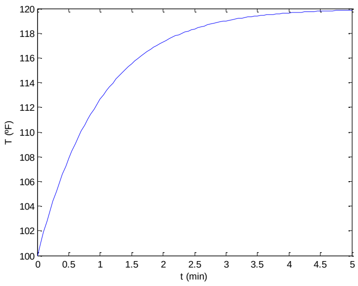
$$T_{in}'(s) = \frac{90-70}{s} = \frac{20}{s}$$

Multiplicándola por la G_2 $$T'(s) = \frac{1}{0.5s+1}\frac{20}{s}$$

Antitransformando $$T'(t) = 20\left(1-e^{-2t}\right)$$

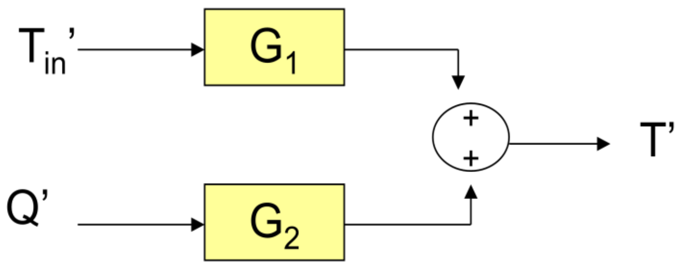
Y escribiéndolo en variables reales

$$T(t) = 100 + 20\left(1-e^{-2t}\right)$$



Considérese ahora que al mismo tiempo que la temperatura de entrada aumenta a 90ºF el flujo de calor es cambiado a 1600 Btu/min

Ambos cambios en las señales de entrada contribuyen al cambio en la señal de salida. Esto se esquematiza con el siguiente diagrama de bloques:



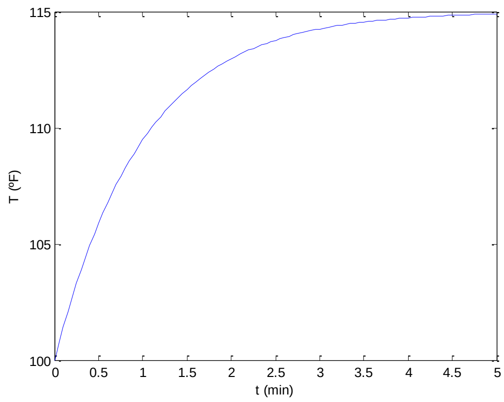
$$T_{in}'(s) = \frac{90-70}{s} = \frac{20}{s} \qquad Q'(s) = \frac{1600-1920}{s} = -\frac{320}{s}$$

Ahora $$T(s) = \left(\frac{K}{\tau\ s+1}\right)\left(-\frac{320}{s}\right) + \left(\frac{1}{\tau\ s+1}\right)\left(\frac{20}{s}\right)$$

$$\tau = 0.5\,\text{min}$$

$$K = \frac{1}{200\,lb/\text{min} \times 0.32\,Btu/lb.^{o}F} = 1.56\times10^{-2}\ \frac{^{o}F}{Btu/\text{min}}$$

$$\mathrm{T}(s)=\frac{-5}{s(0.5s+1)}+\frac{20}{s(0.5s+1)}=\frac{15}{s(0.5s+1)}$$



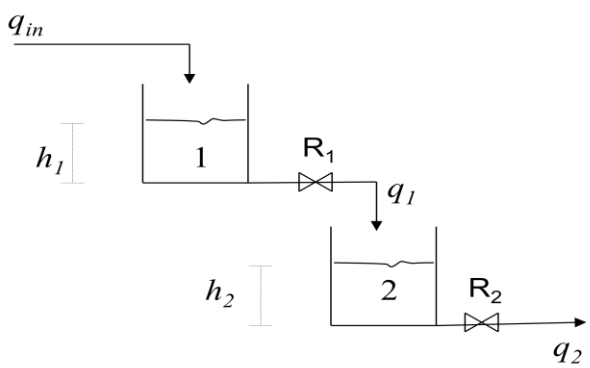
$$T(t)=100+15\left(1-e^{-2t}\right)$$

Ver 'ejem7.2xcos'.

Procesos en serie

La función de transferencia de procesos en serie resulta de multiplicar las funciones de transferencia correspondientes a cada proceso por separado.

Consideremos por ejemplo dos tanques en serie (sistema linealizado)



Del balance de materia para el primer tanque $$A_1\frac{dh_1}{dt}=q_{in}-q_1$$

Suponiendo que el caudal de salida es lineal con la altura $$q_1=\frac{1}{R_1}h_1$$

Por lo que sustituyendo en la anterior $$A_1\frac{dh_1}{dt}=q_{in}-\frac{1}{R_1}h_1$$

En variables desviación $$A_1\frac{dh_1'}{dt}=q_{in}'-q_1'$$

$$q_1'=\frac{1}{R_1}h_1'$$

Tomando transformadas

$$\frac{\mathrm{H}_1(s)}{\mathrm{Q}_{\mathrm{in}}(s)} = \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$$

$$\frac{\mathrm{Q}_1(s)}{\mathrm{H}_1(s)} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{K_1}$$

Del mismo modo para el segundo tanque

$$A_2 \frac{dh_2{}'}{dt} = q_1{}' - q_2{}'$$

$$q_2{}' = \frac{1}{R_2} h_2{}'$$

$$\frac{\mathrm{H}_2(s)}{\mathrm{Q}_1(s)} = \frac{R_2}{A_2 R_2 s + 1} = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

$$\frac{\mathrm{Q}_2(s)}{\mathrm{H}_2(s)} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{K_2}$$

Podemos relacionar todas estas funciones de transferencia

$$\frac{\mathrm{Q}_2(s)}{\mathrm{Q}_{\mathrm{in}}(s)} = \frac{\mathrm{Q}_2(s)}{\mathrm{H}_2(s)} \frac{\mathrm{H}_2(s)}{\mathrm{Q}_1(s)} \frac{\mathrm{Q}_1(s)}{\mathrm{H}_1(s)} \frac{\mathrm{H}_1(s)}{\mathrm{Q}_{\mathrm{in}}(s)}$$

$$= \frac{1}{K_2} \times \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \times \frac{1}{K_1} \times \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$$

$$\frac{\mathrm{Q}_2(s)}{\mathrm{Q}_{\mathrm{in}}(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Puede verse claramente que la función de transferencia total es el producto de la función de transferencia del primer proceso ($1/(\tau_1 s+1)$) y de la del segundo ($1/(\tau_2 s+1)$) .

La representación en un diagrama de bloques sería