

Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2017

Recomendaciones generales:

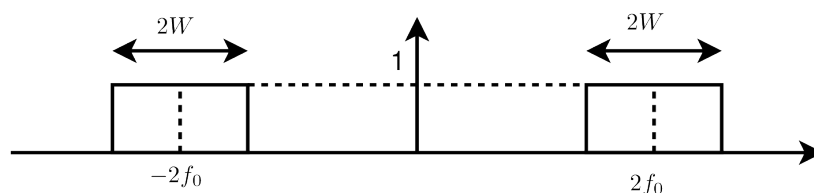
- Lea atentamente todos los ejercicios y asegúrese de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS.** Expresar sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- **HAGA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1 (14 puntos)

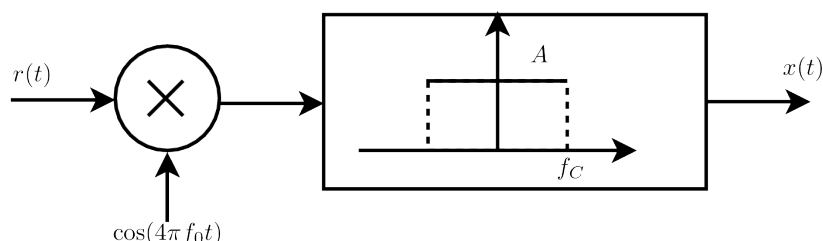
a) Sea $x(t)$ una señal real de banda acotada W . Se la muestrea multiplicándola por el peine de Dirac $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, con $f_0 = \frac{1}{T} \gg 2W$, obteniéndose la señal $s(t)$. Bosquejar $S(f) = \mathcal{F}[s(t)](f)$.

(Recordar que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nx_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x_0} e^{jn\frac{2\pi}{x_0}x}$).

b) Se filtra $s(t)$ con un filtro pasabanda ideal, cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura, obteniéndose $r(t)$.



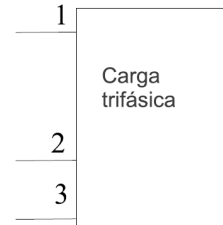
Luego se inyecta $r(t)$ en el siguiente circuito demodulador. Diseñar la frecuencia de corte y la ganancia del filtro pasabajos de forma de poder recuperar $x(t)$.



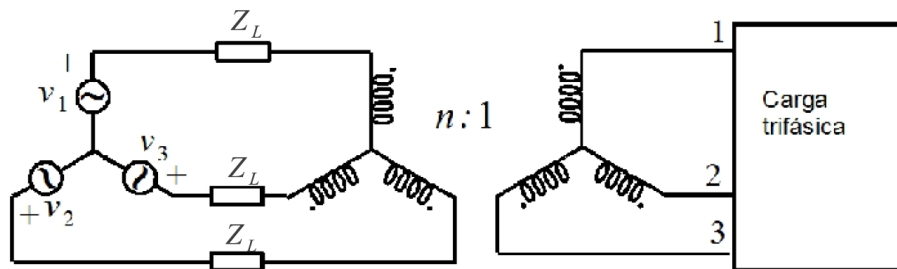
Problema 2 (17 puntos)

a) En una planta industrial, interesa alimentar la carga trifásica que se muestra en la figura, de la cual se dispone únicamente de tres bornes accesibles. La frecuencia de trabajo es 50 Hz y se mantiene a lo largo del ejercicio. Para obtener un modelo eléctrico de la carga, se decide realizar un ensayo, alimentándola con un sistema trifásico de fuentes en triángulo de valor eficaz 380V, midiéndose las potencias activa y reactiva consumidas.

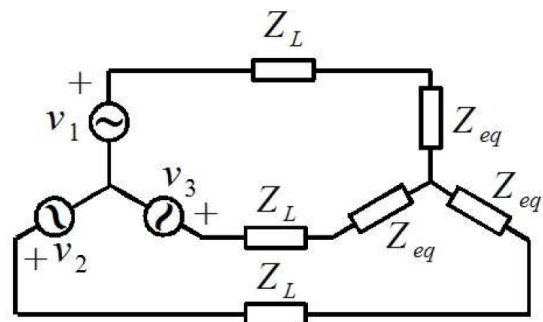
I. Suponiendo que la carga se encuentra en las hipótesis del teorema de Blondell y que se dispone de dos vatímetros, indique mediante un esquema un posible conexionado de los mismos para medir la potencia activa en el ensayo. Justifique claramente los fundamentos de su método de medida.



II. Hallar un modelo para la carga, como tres impedancias idénticas Z en estrella, sabiendo que del ensayo se obtuvo $P = 7504W$ y $Q = 4332VAR$.



b) La misma carga se alimenta mediante el esquema con transformadores de la figura de arriba, donde el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto. Mostrar que es equivalente al circuito trifásico de la derecha, para Z_{eq} que se hallará en función de n (relación de transformación de los transformadores ideales) y Z . **Justificar.**



c) Trabajando con el equivalente de anterior, con:
 $v_1(t) = \sqrt{2} 7.2kV \sin(100\pi t)$, $v_2(t) = \sqrt{2} 7.2kV \sin(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$, $v_3(t) = \sqrt{2} 7.2kV \sin(100\pi t + \frac{4\pi}{3})$

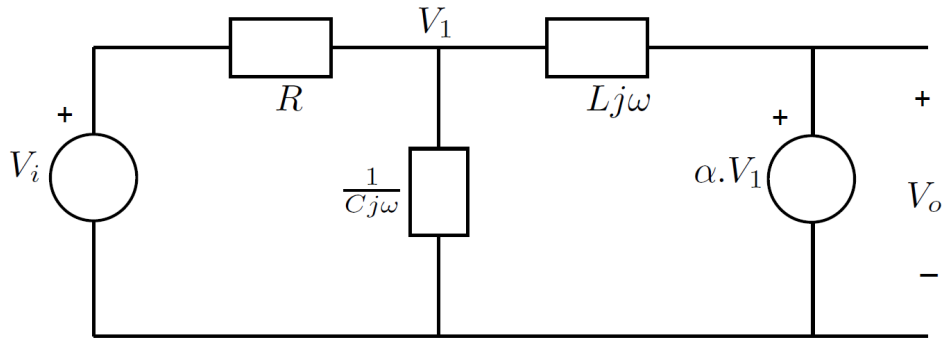
$$n = \frac{7200}{220} \quad , \quad Z_L = R + Lj\omega \quad , \quad R = 100\Omega \quad , \quad L = 20Hy$$

- I. Hallar los fasores I_1, I_2, I_3 correspondientes a las corrientes de línea. Representarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores V_1, V_2, V_3 del sistema de fuentes.
- II. Obtener las expresiones temporales, $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$.
- III. Calcular las potencias activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes.

d) Compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, sin modificar la potencia activa que entregan. Para ello indicar qué componentes colocaría, sus valores y cómo los conectaría.

Problema 3 (17puntos)

Se considera el circuito en fasores de la figura.



- a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.
- b) A partir de ahora, se sabe que $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$. Hallar el valor del parámetro α para que

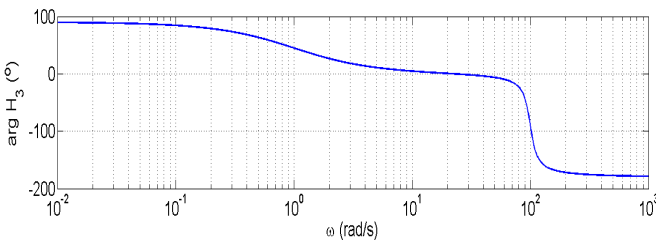
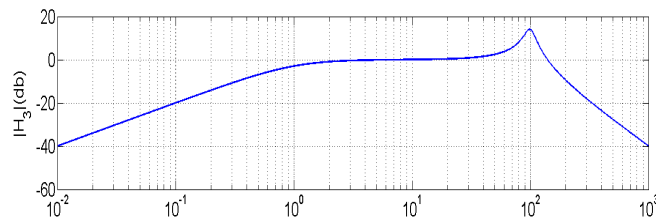
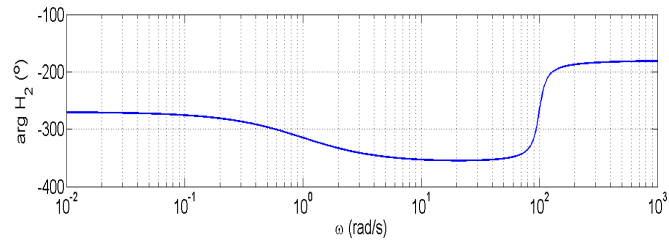
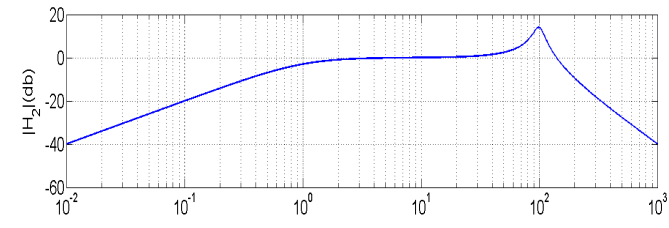
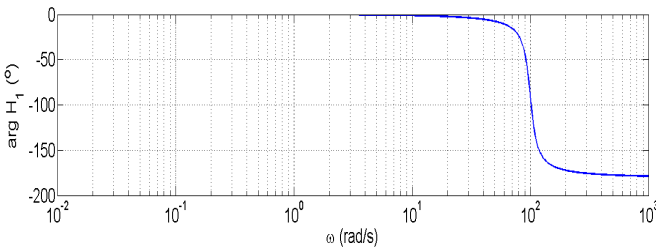
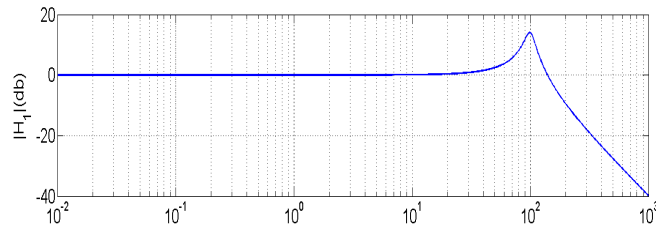
$$H(j\omega) = -\frac{99\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

- c) Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, **explicando claramente su deducción**.
- d) Hallar la respuesta en régimen del sistema para la entrada $v_i(t) = \sqrt{2} \cdot E \cdot \cos(10\omega_0 t + \pi/6)$.
- e) Hallar la o las frecuencias de trabajo a las cuales el sistema responde en régimen con una respuesta con la misma amplitud que la de la entrada.

Problema 4 (12 puntos)

Se tiene un sistema lineal de cuya respuesta en régimen se conoce lo siguiente:

- Existe una pulsación ω_1 tal que ante la entrada $e_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t - 45^\circ)$ responde con una señal $r_1(t)$ de amplitud $\frac{A}{5}$.
- Existe una pulsación ω_2 , **mucho mayor que** ω_1 , tal que ante la entrada $e_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 t + 80^\circ)$ responde con la señal $r_2(t) = A' \cos(\omega_2 t - 20^\circ)$, con A' no conocido.



- Para cada uno** de los Diagramas de Bode mostrados en la figura, indicar, justificando, si corresponde o no al sistema descrito.
- Para la o las respuestas afirmativas de la parte anterior, hallar aproximadamente la señal $r_1(t)$. Justificar.

Solución

Problema 1

- a) Sabemos que la transformada de Fourier (TdF) lleva el producto ordinario en el producto convolución y el producto convolución en el producto ordinario. Usaremos letras mayúsculas para las transformadas. Entonces

$$S(f) = \mathcal{F}[x(t).g(t)](f) = \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[g(t)](f) = X(f) * G(f)$$

Veamos la TdF del peine (está hecho con detalle en las notas del curso):

$$\mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right] (f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(t - nT)](f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fT} \mathcal{F}[\delta(t)](f)$$

donde hemos usado la propiedad de que la traslación temporal se traduce en un desfase en frecuencia. Como la TdF de la δ de Dirac es igual a la distribución asociada a la función constante igual a 1, obtenemos

$$\mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right] (f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fT} = f_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_0} e^{-j2\pi fT}$$

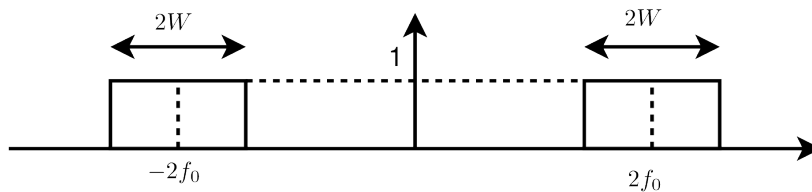
definiendo $f_0 = \frac{1}{T}$. La última expresión corresponde a la serie de Fourier del Peine de Dirac de periodo f_0 m multiplicado por f_0 , por lo que

$$G(f) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right] (f) = f_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

Retomando, vemos que

$$S(f) = \mathcal{F}[x(t).g(t)](f) = X(f) * G(f) = f_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_0)$$

donde hemos usado que convolucionar con la δ corrida es equivalente trasladar en la variable. El espectro de $s(t)$ es periódico, de periodo f_0 , y surge entonces de superponer infinitas copias del espectro de $g(t)$, centradas en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. De la condición $f_0 \gg 2W$, sabemos que el espectro de $s(t)$ es el espectro de $x(t)$ periodizado y multiplicado por f_0 .



- b) El filtrado pasabanda ideal da como resultado una señal $r(t)$ cuyo espectro verifica $R(f) = S(f).H(f)$, siendo H la TdF de la respuesta al impulso del filtro pasabanda. Observando el tamaño de la banda pasante, vemos que $R(f)$ es el espectro de $x(t)$, trasladado a las frecuencias $\pm 2f_0$. Al inyectar $r(t)$ en el demodulador y transformando el producto ordinario, a la salida del multiplicador obtenemos una señal

$$\begin{aligned} y(t) = r(t) \cdot \cos(4\pi f_0 t) &\Rightarrow Y(f) = R(f) * \mathcal{F}[\cos(4\pi f_0 t)](f) = R(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)] \\ &= \frac{1}{2} [R(f - 2f_0) + R(f + 2f_0)] \end{aligned}$$

Si bosquejamos el espectro de $y(t)$, vemos que en la banda $[-W, W]$, coincide con el de $x(t)$. También vemos que aparecen componentes de frecuencia en bandas superiores. Para recuperar $x(t)$, basta con hacer un filtrado pasabajos ideal, con frecuencia de corte W y ganancia tal que compense el factor que ha sido introducido en el proceso. (Se sugiere dibujar cuidadosamente los espectros anteriores y determinar la ganancia necesaria).

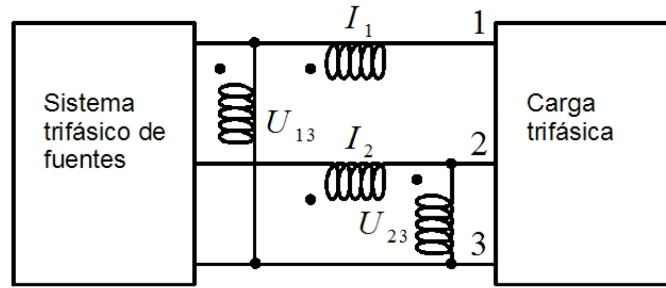


Figura 1: Esquema de conexión de los vatímetros

Problema 2

- a) I. Para medir la potencia consumida por la carga, podemos utilizar el teorema de Blondell. Sabemos que las cargas verifican las hipótesis del teorema¹, por lo tanto $P = \sum_{j=1}^3 Re [U_{jx} \bar{I}_j]$ donde U_{jx} es la tensión entre la línea j y un punto de referencia cualquiera x y \bar{I}_j es la corriente en la línea j . Elijiendo x convenientemente, en una de las líneas, por ejemplo $x = 3$, simplificamos el calculo anterior, pues uno de los términos se anula trivialmente. Finalmente tenemos:

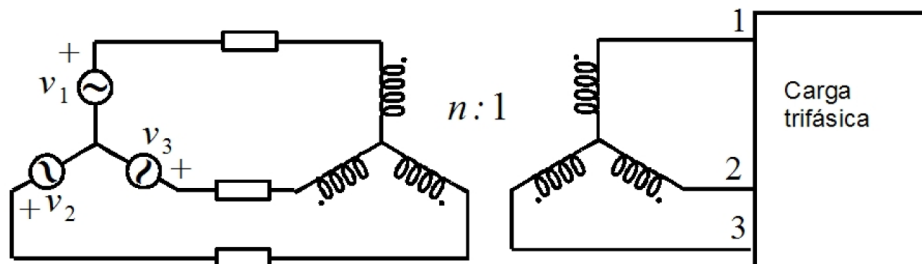
$$P = Re[U_{13} \bar{I}_1] + Re[U_{23} \bar{I}_2] \tag{0.1}$$

Podemos medir las cantidades anteriores, con tan solo dos vatímetros, conectados como se muestra en la figura ??.

- II. Buscamos un modelo para las cargas, formado por tres impedancias idénticas Z en estrella, que consuman $P = 7504W$ y $Q = 4332Var$.

$$Z = |Z| \angle \varphi \text{ donde } \begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{Q}{P} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \\ |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ Recordemos que } |S| = 3 |V_{eff}| |I_{eff}| = 3 \frac{|V|^2}{|Z|} \\ \Rightarrow |Z| = \frac{3 \left(\frac{380}{\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \Rightarrow |Z| = 16.7\Omega \end{cases}$$

$$Z = 16.7\Omega \angle 30^\circ$$



- b) En primer lugar, sustituimos en el circuito de la figura las cargas trifásicas por sus modelo equivalente calculado en la parte anterior. Luego, observamos el equivalente monofásico, como se ilustra en la figura ??, donde calculando la impedancia vista Z_v obtenemos $Z_v = n^2 Z$. Finalmente el circuito trifásico equivalente se muestra en la figura ??, donde $Z_{eq} = n^2 Z$

¹la condición necesaria para aplicar el teorema de Blondell, es que si las cargas están en estrella, no exista conexión de neutro entre las cargas y las fuentes.

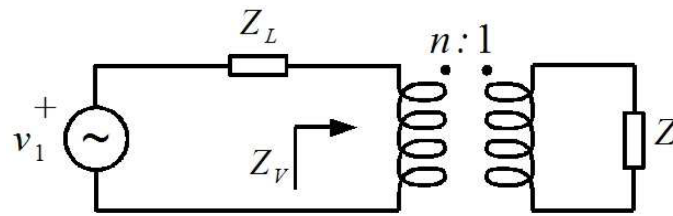


Figura 2: Equivalente monofásico

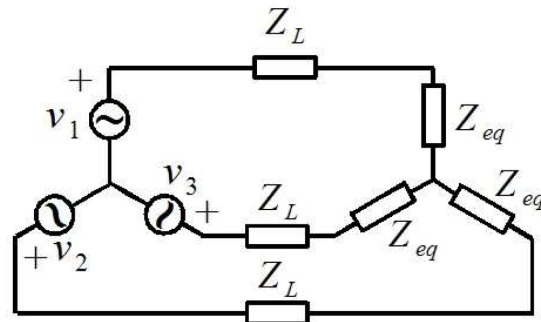


Figura 3: Circuito equivalente

c) I. Trabajando con el circuito equivalente, tenemos:

$$I_i = \frac{V_i}{Z_L + Z_{eq}} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad \text{con } V_1 = 7.2kV \angle 0^\circ, V_2 = 7.2kV \angle 120^\circ, V_3 = 7.2kV \angle 240^\circ \quad (0.2)$$

Luego sustituyendo los parámetros por sus valores dados en la letra, obtenemos:

$$I_1 = 331mA \angle -44^\circ \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 331mA \angle -44^\circ \\ I_2 = 331mA \angle -44^\circ + 120^\circ \\ I_3 = 331mA \angle -44^\circ + 240^\circ \end{cases} \quad (0.3)$$

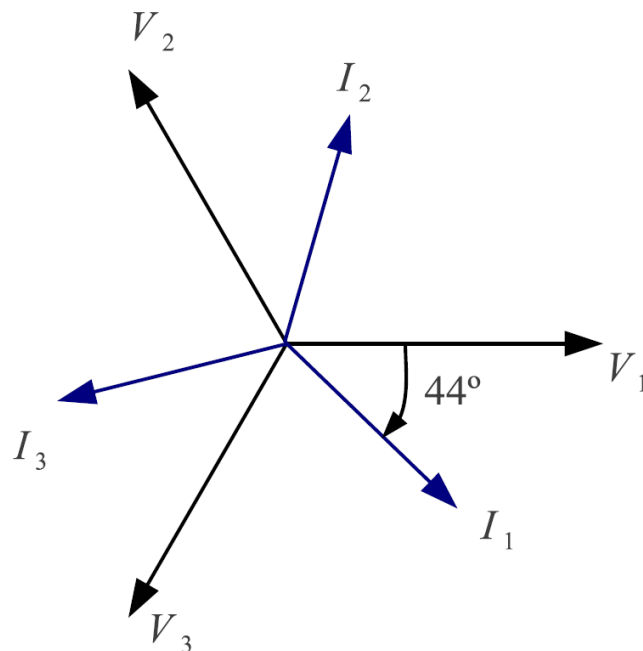


Figura 4: Diagrama fasorial

II. Evaluando las expresiones de la parte anterior, tenemos:

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2} 331mA \sin(\omega t - 0.77) \\ i_2(t) = \sqrt{2} 331mA \sin(\omega t - 0.77 + \frac{2\pi}{3}) \\ i_3(t) = \sqrt{2} 331mA \sin(\omega t - 0.77 + \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (0.4)$$

III. De las partes anteriores, tenemos los fasores de tensión y corriente. Calculamos la potencia activa y reactiva consumidas a las fuentes como:

$$P = 3\text{Re}[V \bar{I}] \Rightarrow \boxed{P = 5142W}$$

$$Q = 3\text{Im}[V \bar{I}] \Rightarrow \boxed{Q = 4966Var}$$

d) Para compensar la potencia reactiva, sin afectar la potencia activa consumida a las fuentes, colocamos un banco de condensadores, en estrella y en paralelo con las fuentes de tensión. Calculamos el valor de los condensadores, de modo que la potencia reactiva total sea nula.

$$Q + Q_C = 0 \Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega |V|^2} \Rightarrow \boxed{C = 0.101\mu F}$$

El esquema de conexión se muestra en la figura ??.

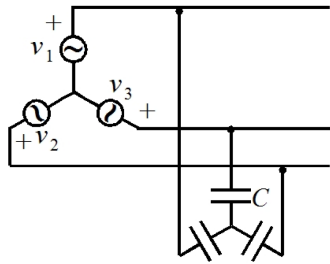


Figura 5: Conexión de los condensadores

Problema 3

a) Planteamos el nudo en \$V_1\$:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 C j\omega + \frac{V_1(1 - \alpha)}{Lj\omega} \Rightarrow \frac{V_i}{R} = V_1 \left[\frac{1}{R} + Cj\omega + \frac{1 - \alpha}{Lj\omega} \right] \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Lj\omega \cdot V_i}{(1 - \alpha)R + L(j\omega) + LRC(j\omega)^2}}$$

De la identidad \$V_o = \alpha \cdot V_1\$ obtenemos

$$V_o(j\omega) = \frac{\alpha Lj\omega \cdot V_i}{(1 - \alpha)R + L(j\omega) + LRC(j\omega)^2}$$

de donde

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\alpha L(j\omega)}{(1 - \alpha)R + L(j\omega) + LRC(j\omega)^2}}$$

b) A partir de ahora, $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$. Entonces

$$H(j\omega) = \frac{\alpha L}{LRC} \cdot \frac{(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{L}{RLC}(j\omega) + \frac{(1-\alpha)R}{RLC}} = \frac{\alpha}{RC} \cdot \frac{(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}(j\omega) + \frac{(1-\alpha)}{LC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + (1-\alpha)\omega_0^2}$$

Imponiendo $\alpha = -99$ obtenemos lo pedido:

$$H(j\omega) = -\frac{99\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

c) Para obtener los diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por banda. Identificamos las frecuencias críticas. En el denominador, tenemos una raíz nula, en tanto en el denominador, tenemos dos raíces complejas conjugadas, de módulo $\omega_n = 10\omega_0$ y factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{20}$. Reescribimos la transferencia en términos de ζ y ω_n :

$$H(j\omega) = -\frac{9.9\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Entonces

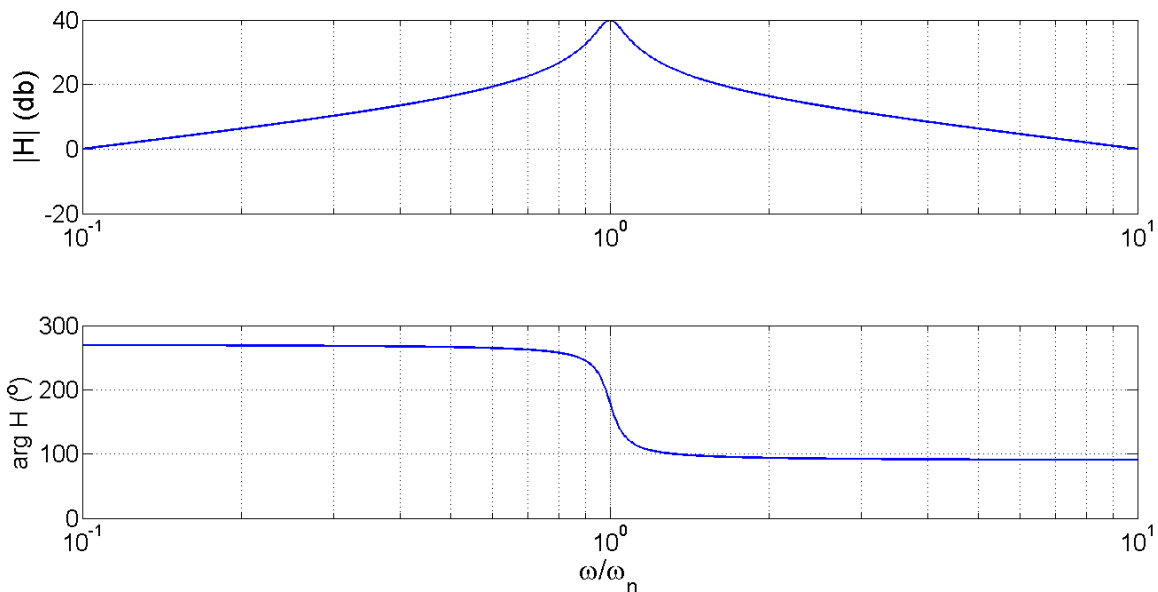
$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{9.9(j\omega)}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx \frac{9.9\omega}{\omega_n} \\ \arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{9.9\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx \frac{9.9\omega_n}{\omega} \\ \arg(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \pm 2\pi \end{cases}$$

Si evaluamos en ω_n , obtenemos

$$H(j\omega_n) = -\frac{9.9\omega_n(j\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{j9.9}{2j\zeta} = \frac{-4.45}{\zeta} \approx -100$$

Por lo tanto el valor asintótico de alta frecuencia para la fase es $-\frac{3\pi}{2}$. La figura siguiente resume lo anterior:



d) Consideremos la entrada $v_i(t) = \sqrt{2}.E. \cos(10\omega_0 t + \pi/6)$. su respectiva respuesta en régimen es:

$$v_o(t) = \sqrt{2}.E. |H(j10\omega_0)| \cos[10\omega_0 t + \pi/6 + \arg H(j10\omega_0)]$$

Como ya vimos,

$$H(j10\omega_0) = H(j\omega_n) = \frac{-4.45}{\zeta} \approx -100$$

de donde

$$v_o(t) = 100\sqrt{2}.E. \cos[10\omega_0 t]$$

e) Hallamos las frecuencias a las cuales el módulo de la transferencia en régimen iguala la unidad (o sea 0db):

$$1 = |H(j\omega)| = \frac{|9.9\omega_n(j\omega)|}{|(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2|} = \frac{9.9\omega_n.\omega}{|\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)|}$$

Elevando al cuadrado, nos queda

$$1 = \frac{9.9^2\omega_n^2\omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} \Leftrightarrow \omega^4 + (4\zeta^2 - 2)\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4 = 9.9^2\omega_n^2\omega^2$$

$$\omega^4 + (4\zeta^2 - 2 - 9.9^2)\omega_n^2\omega^2 + \omega_n^4 = 0$$

Obtenemos una ecuación bicuadrada con dos raíces positivas (observar el cambio de signo de los coeficientes). Resolviéndola, tenemos dos frecuencia positivas a las cuales la ganancia vale 0db:

$$\omega_1 \approx 0.1\omega_n \quad , \quad \omega_2 \approx 10\omega_n$$

Problema 4

Veamos qué requisitos le impone a los diagramas de Bode de la transferencia del sistema cada condición de las dadas por la letra. Recordemos que la respuesta en régimen de un sistema lineal ante una entrada sinusoidal $e(t) = A_e. \cos(\omega_e t + \varphi_e)$ viene dada por la expresión:

$$r(t) = A. |H(j\omega_e)|. \cos[\omega_e t + \varphi_e + \arg(H(j\omega_e))]$$

En primer término, ante una entrada $e_1(t)$ de pulsación ω_1 , amplitud A y fase -45° , el sistema responde en régimen con una señal de amplitud $A/5$. Esto implica entonces que

$$|H(j\omega_1)| = \frac{1}{5} = -20 \log(5) \text{db} \approx -14 \text{db}$$

Por otro lado, de la respuesta a la entrada $e_2(t)$, de pulsación $\omega_2 \gg \omega_1$ obtenemos que

$$\arg(H(j\omega_2)) = -100^\circ$$

a) Veamos ahora cada diagrama.

- I. El primero corresponde a un pasabajos de segundo orden, con frecuencia de corte cercana a 10^2rad/s . Si este fuera el diagrama correcto, la pulsación ω_1 sería mayor a la frecuencia de corte, en tanto la frecuencia ω_2 sería mucho mayor todavía. Pero a altas frecuencias, el sistema introduce un retraso bastante más grande que 100° , lo que no es compatible con la información disponible.
- II. El segundo diagrama filtra tanto las bajas frecuencias como las altas, teniendo una banda pasante entre 10rad/s y 100rad/s . En este caso, ω_1 podría ser menor que 10rad/s o mayor que 100rad/s . En cualquiera de los dos casos, no es posible encontrar una pulsación mucho mayor a la que el sistema introduzca un retraso de fase de 100° .

III. El tercer diagrama es idéntico al anterior en lo que respecta al módulo de la transferencia, por lo que nuevamente tenemos dos posibilidades para ω_1 . Observando atentamente el diagrama de fase, vemos que el sistema introduce un retraso de 100° a una frecuencia cercana a 100rad/s . Eligiendo entonces la opción más baja para ω_1 , menor a 10rad/s , se cumplen los dos datos originales, con pulsaciones que distan más de dos décadas.

b) De la parte anterior, sabemos que $|H(j\omega_1)| = 0,2 \approx -14\text{db}$. Como ω_1 corresponde a baja frecuencia, vemos que el sistema introduce un adelanto menor a los 90° (acá hay que *interpol*ar el diagrama; trabajamos de manera aproximada; elegimos un adelanto de unos 80°). Entonces

$$r_1(t) \approx 0,2A \cos(\omega_1 t - 45^\circ + 80^\circ) = 0,2A \cos(\omega_1 t + 35^\circ)$$