Sistemas Lineales 1

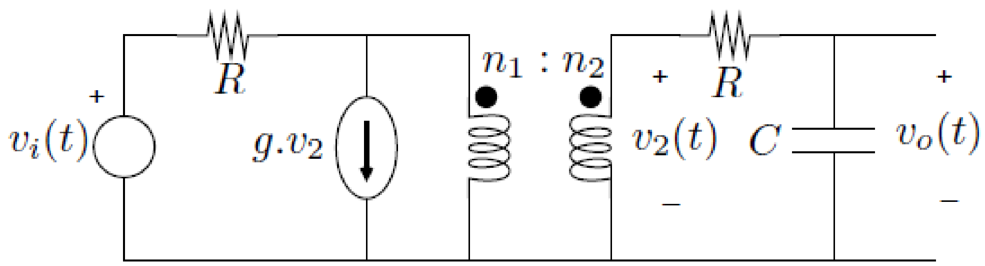
Segundo parcial

1^{er} semestre 2016

Recomendaciones generales:

- **Lea atentamente todos los ejercicios y asegúrese de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HAGA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (16 puntos)



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) Definiendo $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y sabiendo que $\frac{n_1}{n_2} = 2$, simplificar la expresión anterior, verificando que es de primer orden.

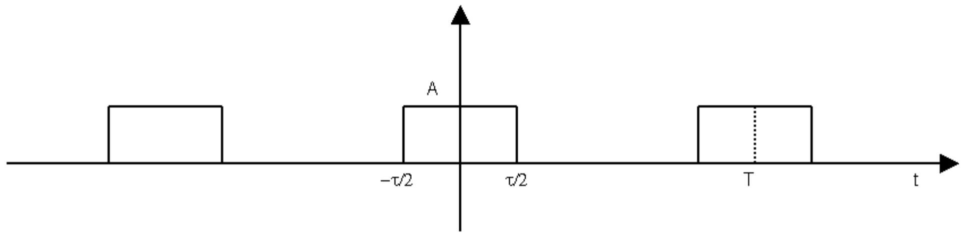
c) Hallar una relación entre R y g que asegure que la distancia entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico vale $1db$ para $\omega = \omega_0$. **Si realiza aproximaciones, debe justificarlas.**

d) Cumpliéndose esa relación,

   i) hallar la respuesta en régimen para la entrada $v_i(t) = A.\cos(2\omega_0 t + 45^o)$;

   ii) hallar la respuesta en régimen para la entrada $v_i(t) = A.v_i(t) = A.\cos(200\omega_0 t + 45^o)$.

Problema 2 (16 puntos)



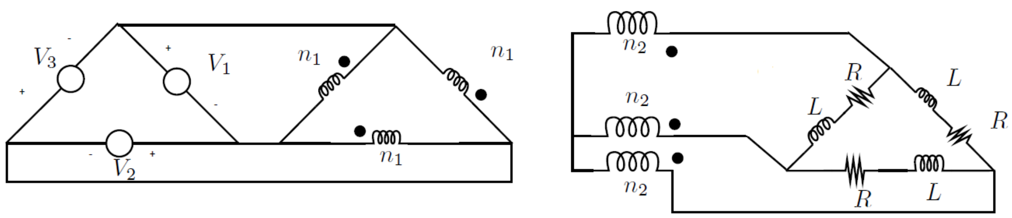
a) Mostrar que la señal $g(t)$ de la figura se puede escribir como la convolución de un pulso por un peine de Dirac, con $T > \tau$.

b) Hallar y bosquejar la transformada de Fourier de la señal de la figura, sabiendo que $f_0 = \frac{1}{T} > 0$ y

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right](f) = f_0. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

c) ¿Qué relación hay entre los coeficientes de Fourier de la señal $g(t)$ y la transformada de Fourier del pulso de la parte a)?

Problema 3 (14 puntos)



Se considera el circuito trifásico de la figura, con transformadores ideales. Los valores de los parámetros son los siguientes:

$\omega = 100\pi rad/s$, $L = 5mHy$, $R = 5\Omega$, $n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$v_1(t) = 400V cos(\omega t)$, $v_2(t) = 400V cos(\omega t + 120^o)$ $v_3(t) = 400V cos(\omega t + 240^o)$

a) Calcular los voltajes en bornes de las cargas: $v_{z1}(t)$, $v_{z2}(t)$ y $v_{z3}(t)$.

b) Calcular las corrientes por las cargas $i_{z1}(t)$, $i_{z2}(t)$ y $i_{z3}(t)$.

c) Hallar los fasores de las corrientes del primario y del secundario del transformador trifásico.

d) Realizar un diagrama fasorial que contenga las tensiones de la fuente trifásica, las corrientes del transformador y las corrientes por la carga.

e) Hallar la potencia activa y reactiva total consumida por el sistema de cargas.

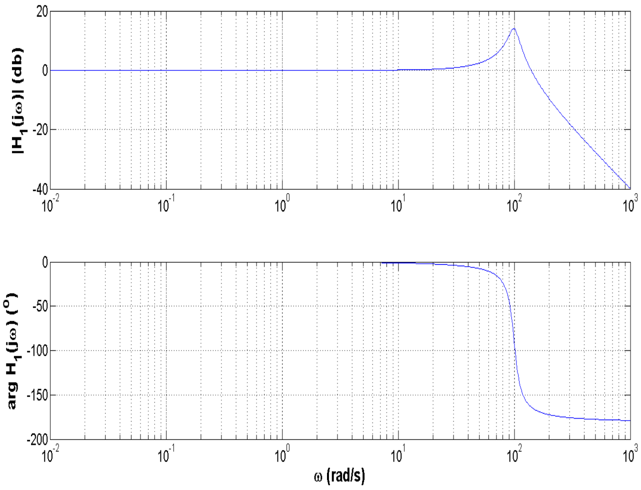
Se desea compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, colocando tres componentes idénticas, **conectadas en estrella**.

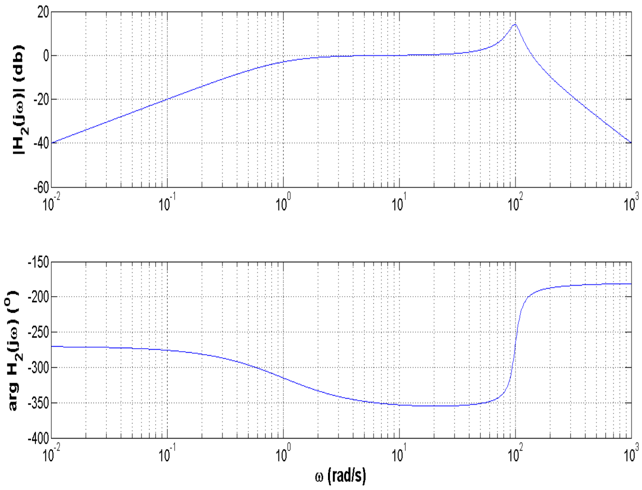
f) Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

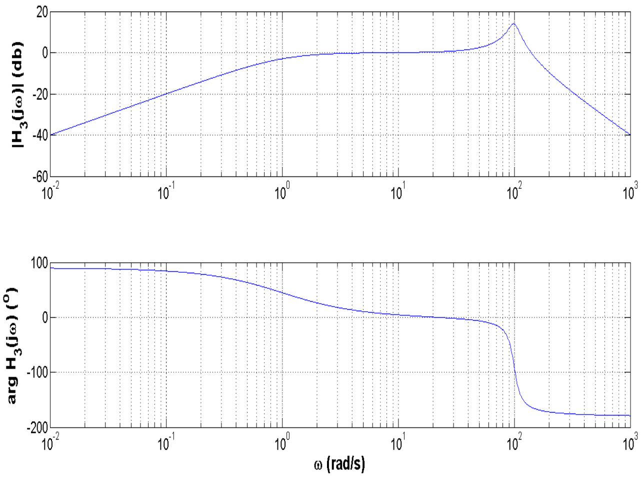
Problema 4 (14 puntos)

Se tiene un sistema lineal de cuya respuesta en régimen se conoce lo siguiente:

- Existe una pulsación ω_1 tal que ante la entrada $e_1(t) = A.\cos(\omega_1 t - 45^o)$ responde con una señal $r_1(t)$ de amplitud $\frac{A}{5}$.
- Existe una pulsación ω_2, **mucho mayor que** ω_1, tal que ante la entrada $e_2(t) = A.\cos(\omega_2 t + 80^o)$ responde con la señal $r_2(t) = A' \cos(\omega_2 t - 20^o)$.







a) **Para cada uno** de los Diagramas de Bode mostrados en la figura, indicar, justificando, si corresponde o no al sistema descrito.

b) Para la o las respuestas afirmativas de la parte anterior, hallar aproximadamente la señal $r_1(t)$. Justificar.

Solución

Problema 1

a) Denotemos de forma estándar las tensiones y corrientes del transformador (tensiones medidas desde los puntos y corrientes entrando por los puntos). Planteando el nudo que contiene al fuente de corriente, obtenemos

$$\frac{V_i - V_1}{R} = gV_2 + I_1 \tag{0.1}$$

Las ecuaciones del transformador nos dicen que:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \quad , \quad n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$$

Panteando el divisor de tensón en la malla del secundario, obtenemos

$$V_o = \frac{V_2}{1 + RCj\omega} \Rightarrow V_2 = V_o(1 + RCj\omega) \Rightarrow V_1 = \frac{n_1}{n_2}(1 + RCj\omega)V_o$$

La corriente del secundario cumple que

$$I_2 = -V_o Cj\omega \Rightarrow I_1 = \frac{n_2}{n_1} Cj\omega V_o$$

Sustituyendo todo en la ecuación (0.1) y operando, llegamos a la transferencia,

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{n_1}{n_2} + Rg\right) + \left(\frac{n_1}{n_2} + Rg + \frac{n_2}{n_1}\right) RCj\omega}$$

b) Para simplificar, introduzcamos $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $\alpha = \frac{n_1}{n_2} = 2$ y $\beta = Rg$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(\alpha + \beta) + \left(\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{j\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha}} . \frac{\omega_0}{j\omega + \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}}\right)\omega_0} = \frac{\left(\frac{1}{\frac{5}{2}+\beta}\right)\omega_0}{j\omega + \left(\frac{2+\beta}{\frac{5}{2}+\beta}\right)\omega_0}$$

c) Del estudio teórico de la respuesta en frecuencia de los sistemas de primer orden, sabemos que la distancia entre los diagramas de Bode de módulo real y asintótico vale aproximadamente $1db$ cuando estamos a una octava por encima o por debajo de la frecuencia de corte. Usando eso, alcanzo con imponer

$$\left(\frac{2 + \beta}{\frac{5}{2} + \beta}\right) = 2 \Rightarrow \beta = Rg = -3$$

La transferencia queda así:

$$H(j\omega) = \frac{-2\omega_0}{j\omega + 2\omega_0}$$

d) Sabemos que la respuesta en régimen de un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega)$ frente a una entrada sinusoidal de pulsación $\tilde{\omega}$ $v_i(t) = \tilde{A}\cos(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi})$ es

$$v_o(t) = \tilde{A}\,|H(j\tilde{\omega})|\,.\cos\left[\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi} + arg\,H(j\tilde{\omega})\right]$$

Para las entradas planteadas, las respectivas respuestas en régimen valen i)

$$v_o(t) = A\,|H(j2\omega_0)|\,.\cos\left[2\omega_0 t + 45^o + arg\,H(j2\omega_0)\right] = \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\left[2\omega_0 t - 90^o\right] = -\frac{A}{\sqrt{2}}\sin\left[2\omega_0 t\right]$$

pues, al ser $2\omega_0$ la frecuencia de corte, tenemos que:

$$|H(j2\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad arg\,H(j2\omega_0) = 225^o = -135^o$$

ii) En este caso, la frecuencia de trabajo está dos décadas por encima de la frecuencia de corte, por lo que el diagrama de Bode puede representarse por su aproximación asintótica de alta frecuencia.

$$H(j200\omega_0) \approx \frac{-2\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{-2\omega_0}{j200\omega_0}\right| & = \frac{1}{100} \\ arg\left(\frac{-2\omega_0}{j200\omega_0}\right) & = 90^o \end{cases}$$

por lo que la respuesta es aproximadamente

$$v_o(t) \approx \frac{A}{100}\cos(200\omega_0 t + 135^o)$$

Problema 2

a) Denotemos por $p_\tau(t)$ el pulso de ancho τ, centrado en 0 y de altura 1. Obervemos que una señal periódica puede ser escrita como la señal en un periodo, periodizada. En un periodo, mirado por ejemplo entre $\pm\frac{T}{2}$, vemos el pulso $Ap_\tau(t)$. Para periodizarlo, basta con convolucionarlo con el peine de Dirac de periodo T:

$$A.p_\tau(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A.p_\tau(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A.p_\tau(t-nT)$$

Laúltima señal coincide con $g(t)$, dado que representa un pulso de ancho τ centrado en cada múltiplo entero de T.

b) Planteando la trasnformada de Fourier, obtenemos

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right](f) = \mathcal{F}\left[A.p_\tau(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right)\right](f) = A.\mathcal{F}\left[p_\tau(t)\right](f).\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right](f)$$

ya que el producto convolución se transforma en el producto ordinario. Sabemos que

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right](f) = f_0.\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0)$$

Por la definición de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\mathcal{F}\left[p_\tau(t)\right](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\tau(t).e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft}dt = \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{-j\pi f\tau} - e^{+j\pi f\tau}}{-j2\pi f}$$

$$= \tau.\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} = \tau.sinc(f\tau)$$

Entonces

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right](f) = \tau.sinc(f\tau).f_0.\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0) = \tau.f_0.f_0.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} sinc(f\tau).\delta(f-nf_0)$$

$$= \tau.f_0.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} sinc(nf_0\tau).\delta(f-nf_0)$$

Para la última igualdad usamos la identidad $\alpha(x).\delta(x-nx_0)=\alpha(0).\delta(x-nx_0)$. Como ya sabíamos, la transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un conjunto de impulsos en las frecuencias armónicas de la señal. Se deja al lector la realización del bosquejo, observando que primero debe dibujarse el *sinc* y luego *muestrearlo* con frecuencia f_0.

c) Para relacionar lo hallado anteriormente con los coeficientes de Fourier de $g(t)$, podemos escribir:

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).e^{jn\frac{2\pi}{T}t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).e^{jn2\pi f_0 t}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right](f)=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).e^{jn2\pi f_0 t}\right](f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).\mathcal{F}\left[e^{jn2\pi f_0 t}\right](f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).\delta(f+nf_0)=$$

donde hemos usado la identidad

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi nf_0 t}\right](f)=\delta(f+nf_0)$$

Identificando esta expresión con la que teníamos antes para la transformada de g obtenemos que

$$c_n(g)=\tau.f_0.sinc(-nf_0\tau)=\tau.f_0.sinc(nf_0\tau) \quad (sinc\,\text{par})$$

Los coeficientes de Fourier de g se obtienen muestreando la transformada de Fourier del pulso en las frecuencias armónicas de la señal.

Problema 3

a) Las dos características del sistema que se describen se reflejan en condiciones que debe satisfacer la respuesta en régimen. Para ver bien esto, usaremos la siguiente porpiedad: ante una entrada sinusoidal pura, $e(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$, un sistema lineal de transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega)$ responde en régimen con

$$r(t)=A.|H(j\omega_0|.\cos\left[\omega_0 t+\varphi+arg\,H(j\omega_0)\right]$$

La primera característica:

Existe una pulsación ω_1 tal que ante la entrada $e_1(t)=A.\cos(\omega_1 t-45^o)$ responde con una señal $r_1(t)$ de amplitud $\frac{A}{5}$.

se traduce en que existe ω_1 tal que $\boxed{|H(j\omega_1)|=\frac{1}{5}=-20*log(5)db\approx -14db}$. La segunda característica:

*Existe una pulsación ω_2, **mucho mayor que** ω_1, tal que ante la entrada $e_2(t)=A.\cos(\omega_2 t+80^o)$ responde con la señal $r_2(t)=A'\cos(\omega_2 t-20^o)$.*

se refleja en que existe $\omega_2\gg\omega_1$ tal que $\boxed{arg\,H(j\omega_2)=-100^o\ \ (\text{ó }+260^o)}$.

Observemos el el diagrama de Bode de módulo de la primer transferencia. Vemos que existe una frecuencia de trabajo, superior a $100rad/s$ que corresponde a la ganancia en decibeles propia de ω_1. Pero no existe una pulsación mucho mayor que introduzca un retraso de 100^o, por lo que debemos descartar esta transferencia.

Las dos transferencias restantes presentan el mismo diagrama de Bode de módulo. Ambas muestran dos frecuencias posibles con ganancia $-14db$, una inferior a $1rad/s$ y otra superior a $100rad/s$. Del diagrama de Bode de fase de la segunda transferencia vemos que a ninguna frecuencia de trabajo se introduce un retardo de 100^o (o un adelanto de 260^o), por lo que también la descartamos. Finalmente, el análisis del diagrama de Bode de fase de la tercera transferencia nos muestra que existe una frecuencia del orden de $100rad/s$ en la que el sistema introduce un retraso de 100^o. Definiendo como ω_1 la frecuencia inferior a $1rad/s$ con ganancia $-14db$ y como $omega_2 = 100rad/s$, vemos que la tercera transferencia cumple con lo especificado inicialmente.

b) La respuesta en régimen de la tercer transferencia para la entrada $e_1(t) = A\cos(\omega_1 t - 45^o)$ es

$$r_1(t) \approx \frac{A}{5}.\cos(\omega_1 t - 45^o + 80^o)$$

ya que en el diagrama de Bode de fase se puede ver que la fase tiende asintóticamente a $+90^o$ en baja frecuencia.

Problema 4

a) Las tensiones en bornes de las cargas, son las tensiones compuestas luego del secundario del transformador. Las tensiones de los secundarios son las del primarios, multiplicadas por la relación de transformación:

$$V_s = \frac{n_2}{n_1}V_1 = \frac{V_1}{n} \Rightarrow V_s = \sqrt{3}.V_1$$

Como las tensiones de los secundarios forman un sistemas equilbirado y perfecto, las tensiones compuestas deseadas se obtienen restando las tensiones de los secundarios, lo que implica multiplicar las amplitudes por $\sqrt{3}$ y sumar o restar 30^o (se resta en este caso):

$$U_{12} = V_{s1} - V_{s2} = \frac{1}{n}.(V_{p1} - V_{p2}) = \frac{1}{n}.(V_1 - V_2) = \frac{1}{n}.\sqrt{3}.V_1.e^{-j30^o} = 3V_1.e^{-j30^o}$$

Las demás tensiones se obtienen desfasando 120^o. Pasando al tiempo:
$v_{Z1}(t) = 1200V cos(\omega t - 30^o)$,
$v_{Z2}(t) = 1200V cos(\omega t + 90^o)$,
$v_{Z3}(t) = 1200V cos(\omega t - 150^o)$,

b) Ya que tenemos las tensiones en bornes de las cargas, los fasores de las corrientes pedidas se obtienen dividiendo la caida de tensión entre la respectiva impedancia.

$$I_{Z1} = \frac{V_{Z1}}{R + Lj\omega}$$

De los datos, tenemos que $R + Lj\omega = (5 + 100\pi.5.10^{-3}\Omega \approx (5 + 1,6)\Omega \approx 5,2e^{17,4^o}\Omega$. Entonces

$$I_{Z1} \approx (155 - j167)A \approx (229e^{-j47,4^o})A$$

Las demás corrientes se obtienen desfasando 120^o. Pasando al tiempo:
$i_{Z1}(t) = 229Acos(\omega t - 47,4^o)$,
$i_{Z2}(t) = 229Acos(\omega t + 72,5^o)$,
$i_{Z3}(t) = 229Acos(\omega t - 167,4^o)$,

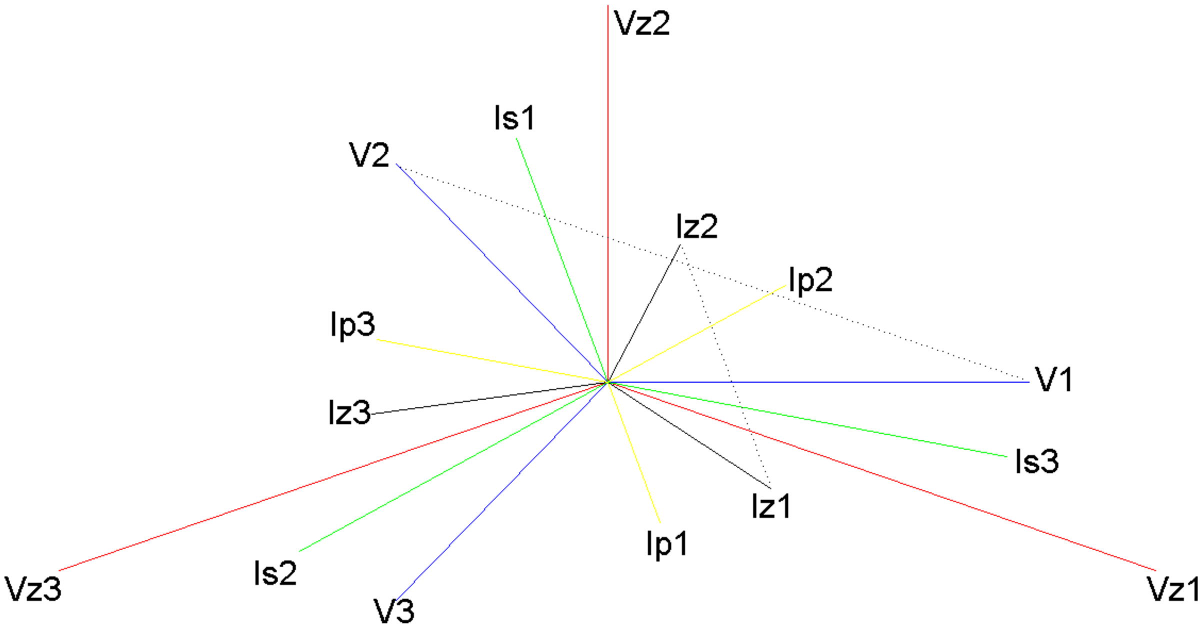
c) La relación entre las corrientes del primario y del secundario viene dada por la ecuación del transformador ideal:

$$n_1 I_p = -n_2 I_s \Rightarrow I_p = -\frac{n_2}{n_1}I_s = nI_s = -\frac{1}{\sqrt{3}}I_s$$

Por otr lado, la relación entre las corrientes del secundario (opuestas a las corrientes por las líneas) y las corrientes por las cargas es nuevamente de $\sqrt{3}$ y 30^o:

$$I_{s1} = -\sqrt{3}.I_{Z1}e^{-j30^o} \approx (396,6e^{j102,5^o})A \Rightarrow I_{p1} \approx (229e^{-j77,4^o})A$$

Los demás fasores se obtienen desfasando 120^o.



d)

e) La potencia total activa y reactiva consumida por las cargas vale:

$$P_{total} = 3\left|\frac{I_{z1}}{\sqrt{2}}\right|^2 .R \approx 393kW$$

$$Q_{total} = 3\left|\frac{I_{z1}}{\sqrt{2}}\right|^2 .L\omega \approx 123kVAR$$

f) Para compensar la reactiva colocando una estrella de condesadores idénticos en paralelo con la carga, observamos que cada condensador va a ver en sus bornes la tensión del secundario. El valor del condesandor a colocar sale de la identidad:

$$-Q_C = \frac{Q_{total}}{3} = \left|\frac{V_s}{\sqrt{2}}\right|^2 C\omega \Rightarrow C = \frac{Q_{total}}{3|V_s|^2\omega} \approx 546\mu F$$