Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2015

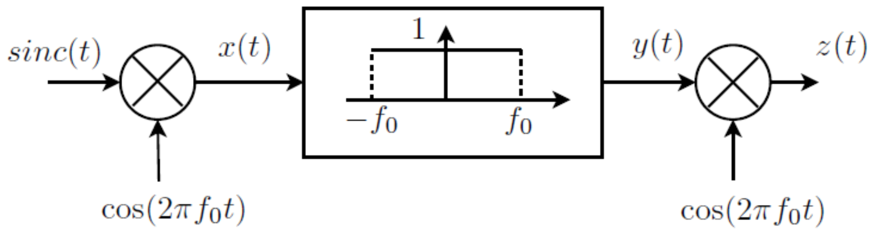
Recomendaciones generales:

- **Lea atentamente todos los ejercicios y asegúrese de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HAGA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**

Problema 1 (15 puntos)

a) Hallar la Trasnformada de Fourier de $g(t) = A.p_T(t)$, siendo $p_T(t)$ el pulso de ancho T, centrado en 0 y de altura 1.

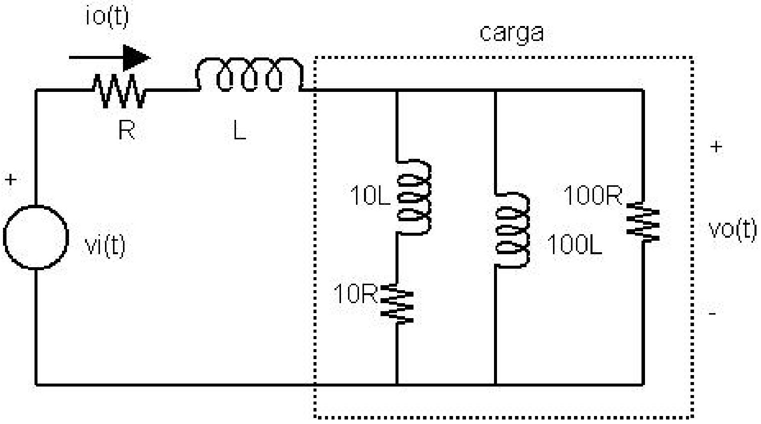
b) Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{sin(\pi x)}{\pi x}\right]^2 dx$.



c) i) En el sistema de la figura, con $f_0 \geq 1$, hallar los espectros de cada una de las señales involucradas: x, y y z.

ii) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2(x)dx$

Problema 2 (17 puntos)



a) En el circuito de la figura, hallar las transferencias en régimen $H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ y $H_2(j\omega) = \frac{I_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) i) Mostrar que es posible elegir un parámetro ω_0 que permite escribir H_1 y H_2 de la siguiente forma:

$$H_1(j\omega) = \frac{100\omega_o j\omega}{(j\omega)^2 + 112\omega_o j\omega + \omega_o^2} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{L} \cdot \frac{(j\omega)^2 + 12\omega_o j\omega + \omega_o^2}{[(j\omega)^2 + 112\omega_o j\omega + \omega_o^2]\,(j\omega + \omega_o)}$$

y bosquejar los respectivos Diagramas de Bode asintóticos, explicando claramente su construcción.

ii) Mostrar que $H_1(j\omega)$ es un filtro pasabanda y hallar **aproximadamente** el ancho de banda del mismo.

c) De la observación de los Diagramas de Bode asintóticos:

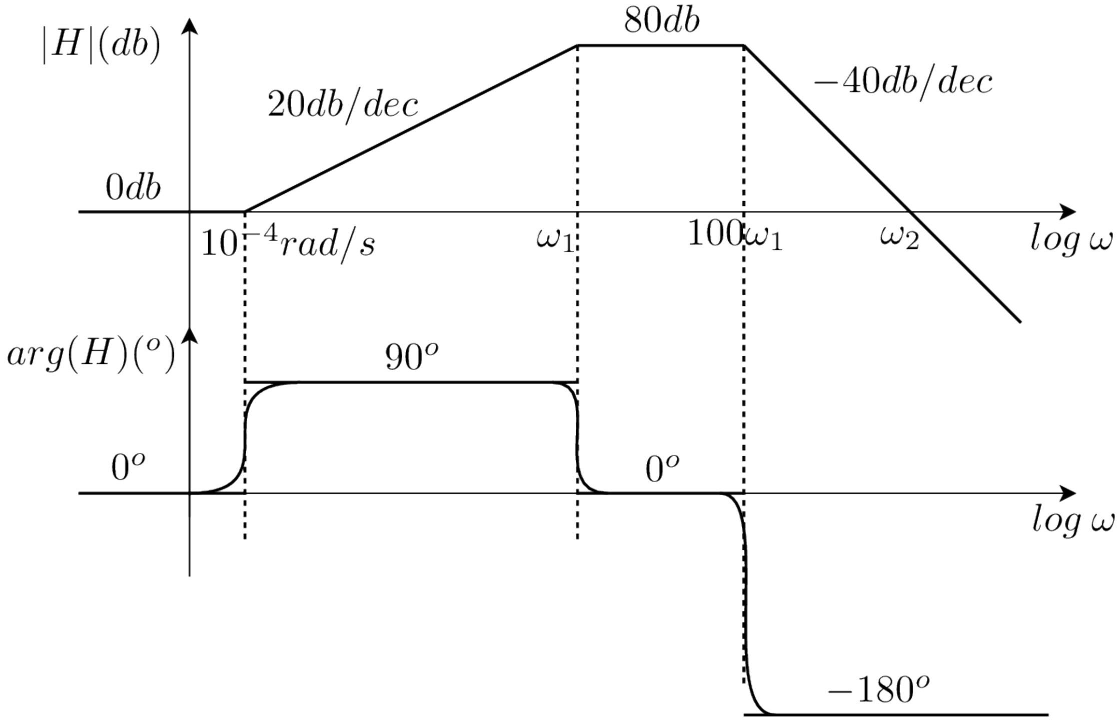
i) Determinar **aproximadamente** la frecuencia angular ω' a la cual el módulo de la potencia aparente consumida por la carga es máximo.

ii) Hallar $v_o(t)$ en régimen cuando la entrada es $v_i(t) = 1V.cos(\omega' t)$.

iii) Determinar **aproximadamente** a qué frecuencia de trabajo la potencia activa consumida por la carga es igual a la potencia reactiva.

Problema 3 (13 puntos)

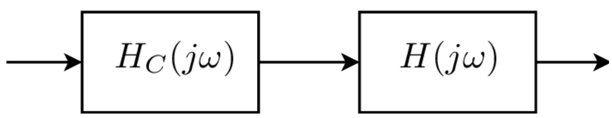
Se consideran los Diagramas de Bode asintóticos de la figura.



a) Calcular aproximadamente las frecuencias angulares ω_1 y ω_2.

b) Hallar una expresión para $H(j\omega)$. JUSTIFICAR!!

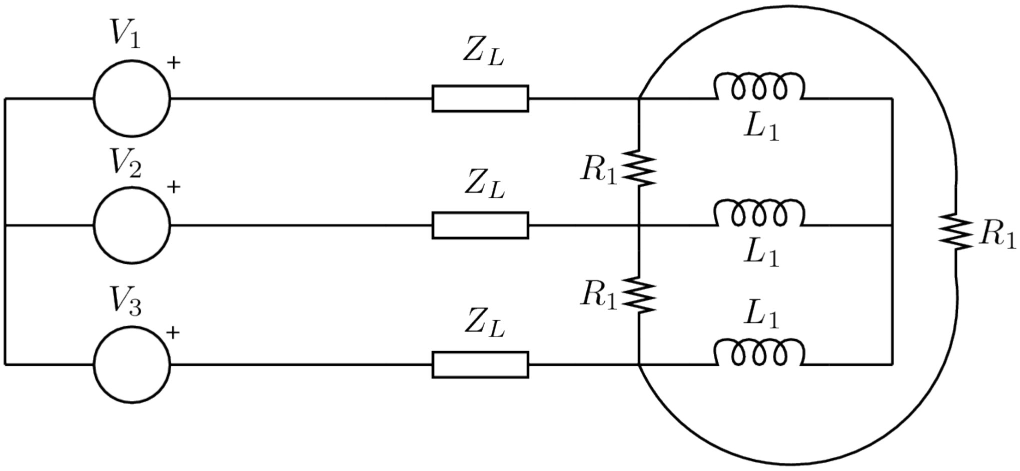
c) Se quiere compensar $H(j\omega)$ como se muestra en la figura, de manera que el sistema resultante prácticamente no distorsione en amplitud en un rango de por lo menos tres décadas. Explicar cómo diseñaría un compensador $H_C(j\omega)$ (transferencia propia) y dibujar el Diagrama de Bode de módulo asintótico del sistema compensado.



Problema 4 (15 puntos)

a) Enunciar el Teorema de Blondell.

b) Explicar el método de los dos vatímetros para medir potencias en un sistema trifásico.



c) En el circuito trifásico en fasores de la figura, una fuente trifásica alimenta una carga trifásica equilibrada a través de unas líneas de conexión. Los elementos involucrados tienen los siguientes valores:

$$V_1 = 6000V \quad , \quad V_2 = V_1 e^{j120^o} \quad , \quad V_3 = V_1 e^{j240^o} \quad , \quad \omega = 100\pi rad/s$$

$$Z_L = R + Lj\omega \quad , \quad R = 3\Omega \quad , \quad L = 6.82Hy \quad , \quad R_1 = 2700\Omega \quad , \quad L_1 = 4.96Hy$$

Se pide hallar:

i) las corrientes de líneas y las tensiones compuestas (entre líneas, a la salida de la fuente trifásica); **dibujarlas en un diagrama fasorial junto con las tensiones de las fuentes**;

ii) la potencia activa, reactiva y aparente consumida al sistema de fuentes.

d) Describir cómo compensaría la potencia reactiva consumida por la carga. Indicar qué elementos colocaría, el valor de los mismos y el respectivo esquema de conexión.

Solución

Problema 1

a) Calculamos la TdF de la señal pedida, directamente por integración a partir de la definición.

$$\mathcal{F}[g(t)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A.e^{-j2\pi ft}dt = A.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{A}{\pi f}.\left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{2j}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[g(t)](f) = \frac{A}{\pi f}.\sin(\pi fT) = AT.\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right] = AT.sinc(fT)$$

b) Para calcular la integral pedida, aplicamos la Identidad de Parseval. Para la señal de la parte anterior, Parseval nos dice que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (AT)^2.sinc^2(fT)df = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = A^2.T$$

Entonces, con $A = 1$ y $T = 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(f)df = 1$$

(Otra alternativa de cálculo es considerar la convolución temporal de g consigo misma, que da un triángulo de altura A^2, y se da en $t = 0$. La convolución temporal se traduce en frecuencia en elevar al cuadrado su TdF, lo que hace aparecer el $sinc^2$. La antitransformada del $sinc^2$, evauada en 0, da entonces A^2).

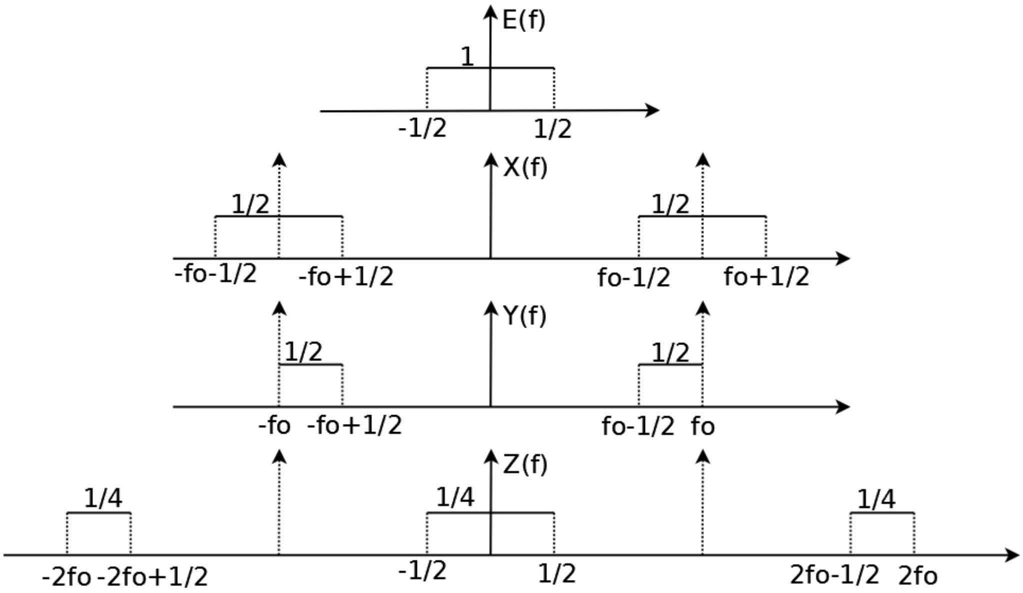
c) Analizamos el sistema avanzando de izquierda a derecha, siguiendo la señal de entrada $sinc(t)$. Lo primero que aparece es una modulación de amplitud, al multiplicar la entrada por un coseno puro, de frecuencia f_0. Esta multiplicación temporal se traduce en frecuencia en la convolución del espectro de la entrada con la TdF del coseno, que consiste en dos deltas, de amplitud 1/2, con asiento en $\pm f_0$. El espectro de la señal $x(t)$ resultante es el espectro de la entrada, centrado en las frecuencias f_0 y $-f_0$, de amplitud reducida a la mitad. Denotemos por $e(t)$ a la entrada y por $E(f)$ su TdF, que es un pulso en frecuencia, centrado en 0, de ancho total 1 Hz y altura 1. Entonces:

$$\mathcal{F}[x(t)](f) = \frac{1}{2}.\left[E(f - f_0) + E(f + f_0)\right]$$

La señal $x(t)$ entra a un filtro pasabajos ideal, de frecuencia de corte f_0, por lo que su salida $y(t)$ se calcula fácilmente en frecuencia, ya que el filtro elimina las frecuencias que en valor absoluto superan f_0. El espectro de $y(t)$ consiste en dos pulsos de altura 1/2 y ancho 1 Hz.

Finalmente, la señal $y(t)$ vuelve a ser modulada en amplitud con un coseno de frecuencia f_0, por lo que se vuelve a centrar el espectro de $y(t)$ en torno a $\pm f_0$, dividiendo nuevamente entre 2.

La siguiente figura resume los espectros calculados:



d) Para el calculo de la integral deseada, nos basamos en la Identidad de Parseval y en la gráfica de $Z(f) = \mathcal{F}[z(t)](f)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2(f)df$$

Sumamos los aportes de cada banda del espectro:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2(x)dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Problema 2

Es el ejercicio 1 del Práctico 8.

Problema 3

a) Para determinar las frecuencias pedidas, asumimos que el diagrama asintótico de módulo es representativo del real, en particular en lo que refiere a las pendientes de crecimiento y decrecimiento. En baja frecuencia tenemos una ganancia unitaria, que a partir de $\omega_0 = 10^{-4} rad/s$ comienza a crecer a $20db/dec$, alcanzando $80db$ en ω_1. Por lo tanto, la separación entre ω_0 y ω_1 es de 4 décadas, de donde

$$\boxed{\omega_1 = 10^4\omega_0 = 1 rad/s}$$

Un razonamiento similar nos lleva a que ω_2 está dos décadas por encima de $100\omega_1$, de donde

$$\boxed{\omega_2 = 100 \times 100\omega_1 = 100 \times 100 \times 10^4\omega_0 = 10^8\omega_0 = 10^4 rad/s}$$

b) Para determinar una expresión analítica para $H(j\omega)$, debemos ver complexivamente qué sucede con el módulo y con la fase. En baja frecuencia, tenemos una ganacia unitaria y un desfasaje nulo. La expresión para $H(j\omega)$ en esta región de frecuencias es aproximadamente

$$H(j\omega) \approx 1$$

Al aumentar la frecuencia, encontramos un crecimiento de $20db/dec$, que se corresponde con una raíz real simple en el numerador, de módulo ω_0. Como la fase también aumenta, esta raíz es negativa.

Al llegar a ω_1, se detiene el crecimiento, lo que implica la presencia de una raíz real simple en el denominador, de módulo ω_1. El decrecimiento respectivo de la fase nos dice que la raíz es negativa.

Al llegar a $100\omega_1$, el módulo empieza a decrecer a una velocidad correspondiente a una raíz real doble o a dos raíces complejas conjugadas, en ambos casos de módulo $100\omega_1$. El comportamiento de la fase indica que la parte real de las raíces anteriores es negativa (es decir, $\zeta > 0$ si hubiera raíces complejas conjugadas). La información disponible no permite discriminar entre ambas situaciones. Tenemos entonces dos posibles expresiones para $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) \approx \frac{10^{16}\omega_0^2.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega + 10^4\omega_0)(j\omega + 10^6\omega_0)^2}$$

ó

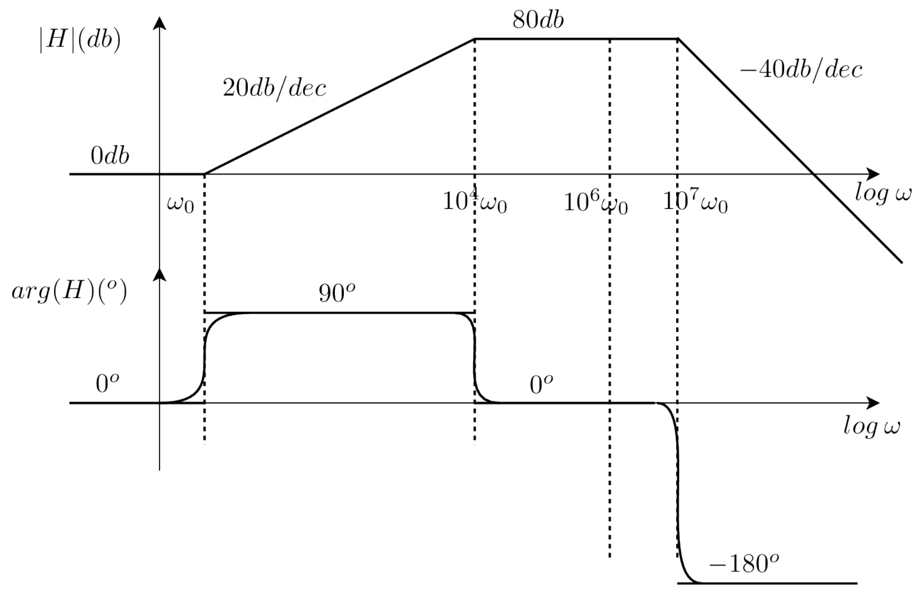
$$H(j\omega) \approx \frac{10^{16}.\omega_0^2.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega + 10^4\omega_0)\left[(j\omega)^2 + 2\zeta 10^6\omega_0(j\omega) + 10^{12}\omega_0^2\right]}$$

con $0 < \zeta < 1$. Observar que hemos ajustado la ganancia en continua.

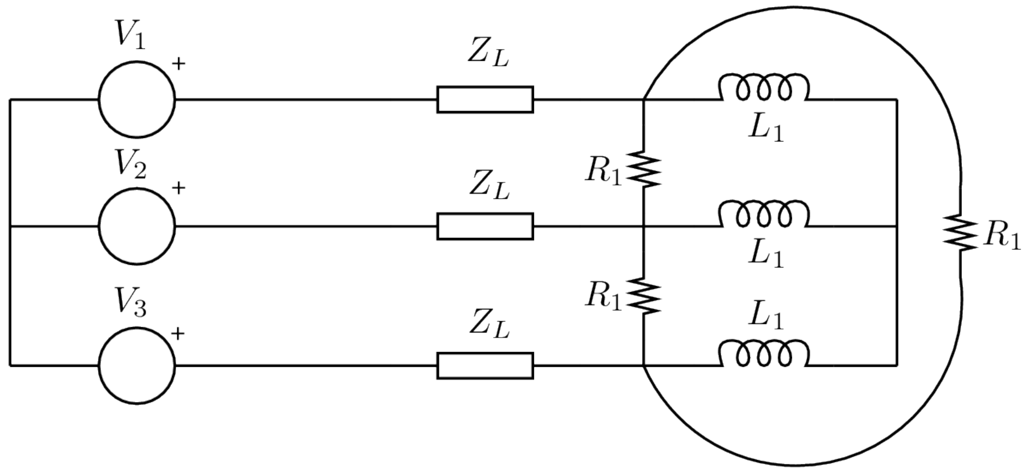
c) La condición de no distorsión de amplitud de un sistema lineal implica que la ganancia debe ser constante en la banda de interés. Observando el Diagrama de Bode de módulo del sistema original, vemos que presenta una banda de no distorsión de amplitud de dos décadas entre ω_1 y $100\omega_1$. Para ampliar esa banda a tres décadas, podemos diseñar una transferencia auxiliar (compensador) que amplíe la banda de respuesta plana. Para ello, debe compensar el efecto de la raíz doble (o las raíces complejas conjugadas) de módulo $100\omega_1$ en el denominador de $H(j\omega)$. Esto conlleva que el compensador tiene que tener una raíz doble (o un par complejo conjugado) en el numerador. Para que la transferencia del compensador sea propia, agregamos raíces en alta frecuencia, a al menos una década de distancia, que no afectan el comportamiento del sistema en la banda de interés. Además, imponemos que la ganancia en continua del compensador sea unitaria.

$$\boxed{H_C(j\omega) = \frac{10.(j\omega + 10^6\omega_0)^2}{(j\omega + 10^7\omega_0)^2}}$$

Los Diagramas de Bode de módulo y fase del sistema compensado se muestran a continuación:



Problema 4



c) Primeramente, debemos hallar la impedancia equivalente de la carga trifásica. Para ello, transfiguramos el triángulo de resistencias, obteniendo una estrella equivalente, que está en paralelo con la estrella de inductancias. Al ser tres resistencias iguales, las resistencias de la transfiguración equivalente son un tercio de las originales. Entonces, la impedancia trifásica equivalente de la carga es una estrella que en cada rama tiene

$$Z_{eq} = \frac{R_1}{3}||L_1 j\omega = \frac{R_1 L_1 j\omega}{R_1 + 3L_1 j\omega}$$

Para obtener la impedancia total por fase que ve la fuente trifásica debemos agregar las impedancias de las líneas:

$$Z_T = Z_L + Z_{eq} = (R + Lj\omega) + \frac{R_1 L_1 j\omega}{R_1 + 3L_1 j\omega}$$

Al ser la carga equilibrada, calculamos la corriente de la línea 1 y luego obtenemos las otras dos simplemente desfasando 120 y 240 grados en el mismo sentido que las fuentes:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_T} \approx 2,29A\angle{-75^o} \Rightarrow I_2 = I_1 e^{j120^o} \quad , \quad I_3 = I_1 e^{j240^o}$$

Para calcular las tensiones compuestas, simplemente restamos las tensiones de las fuentes. Sabemos que van a ser $\sqrt{3}$ veces más grandes que las tensiones de las fuentes, con un corrimiento de 30 grados (para ver si es adelanto o atraso, planteamos gráficamente la resta $V_1 - V_2$):

$$U_{12} = V_1 - V_2 = 6000.\sqrt{3}.e^{-j30^o} \Rightarrow U_{23} = 6000.\sqrt{3}.e^{+j90^o} \quad , \quad U_{31} = 6000.\sqrt{3}.e^{-j150^o}$$

Para calcular la potencia activa y reactiva, podemos usar el Teorema de Blondell, tomando la segunda línea como referencia:

- $P = re(U_{12}).\bar{I}_1 - U_{23}).\bar{I}_3) = re\left[U_{12}.(\bar{I}_1 - e^{j120^o}e^{-j240^o}\bar{I}_1)\right] \Rightarrow$

$$P = re\left[U_{12}\bar{I}_1\sqrt{3}e^{j30^o}\right] = re\left[3.6000V.2,29A.e^{j75^o}\right] = 3.6000V.2,29A.\cos(75^o) \approx 10,7kW$$

- $Q = im\left[3.6000V.2,29A.e^{j75^o}\right] = 3.6000V.2,29A.\sin(75^o) \approx 39,8kVAR.$
- La potencia aparente vale $S \approx 41,2kVA\angle 75^o$.

O podemos directamente calcular la potencia en cada fase y multiplicar por 3. Observar que estas potencias incluyen las pérdidas por las líneas.

d) No nos preocupamos por las líneas. Para compensar la reactiva consumida por la carga, basta con colocar elementos que eliminen la reactancia de la impedancia trifásica equivalente. Al ser la impedancia de carga inductiva, colocamos en paralelo una estrella de condensadores idénticos, de valor C. Como esta estrella queda en paralelo con la estrella de inductancias que constituyen la reactancia de la carga, ambas estrellas deben dar una impedancia equivalente nula. Al estar en paralelo, sumamos las admitancias correspondientes. El valor del condensador es tal que:

$$\frac{1}{L_1 j\omega} = -Cj\omega \Rightarrow C = \frac{1}{L_1\omega^2} \approx 2\mu F$$