Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2014

Recomendaciones generales:

- **Lea atentamente todos los ejercicios y asegúrese de no olvidar realizar alguna parte**.
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio**.
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta**.
- **HAGA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS**.
- **PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS**.
- **Se recuerda que la prueba es individual**.

Problema 1 (16 puntos)

a) Definir la Transformada de Fourier (TdF) para funciones.

b) Definir la TdF para distribuciones.

c) Calcular la TdF de la δ de Dirac.

d) Calcular la TdF de $\pi_T(t)$, pulso de ancho T, de altura 1 y centrado en 0; bosquejar su espectro.

e) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} dx$$

f) Bosquejar el espectro de $w(t) = [\cos(t) + cos(10t)] \cdot \pi_1(t)$.

(Se sabe que la TdF del $\cos(2\pi f_0 t)$ vale $\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$).

Problema 2 (16 puntos)

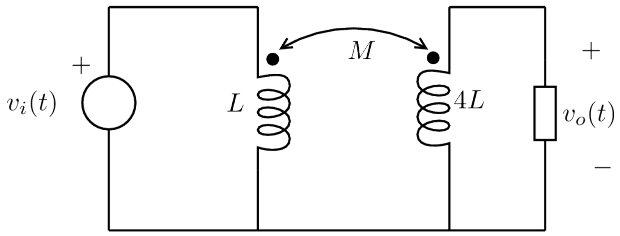


Figura 1:

a) Se considera el transformador **perfecto** de la figura 1. El primario está alimentado por una fuente sinusoidal y en el secundario se ha conectado una impedancia. Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H_P(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$; verificar que no depende de la impedancia conectada al secundario.

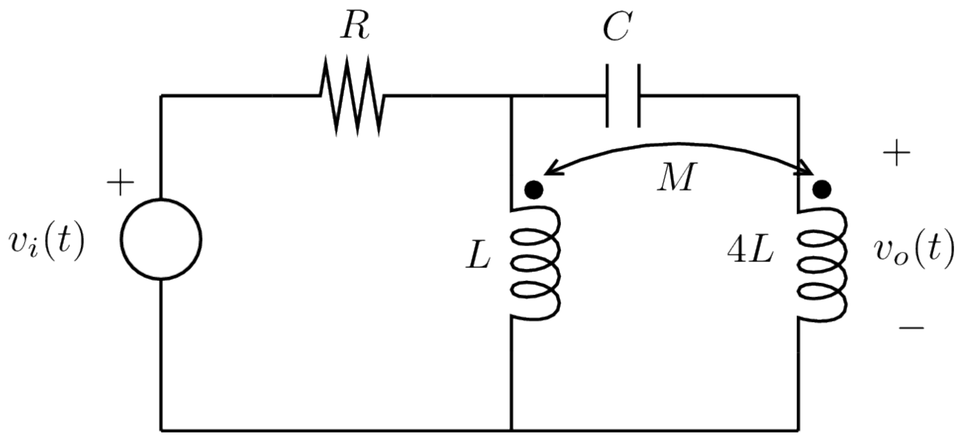


Figura 2:

b) Se considera el circuito de la figura 2, en el que el transformador es perfecto. Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola en función de $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$.

c) Dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando detalladamente el proceso de obtención de los mismos.

d) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual el sistema introduce una ganancia de $4db$.

e) Hallar, si existe, una frecuencia que debe tener una entrada sinusoidal pura para que la respectiva respuesta en régimen del sistema esté en fase con la entrada. Si se encuentra una frecuencia con esas condiciones, hallar la respectiva ganancia del sistema.

f) Se tiene una entrada periódica $g(t)$, de tipo onda cuadrada, de valor medio nulo y frecuencia fundamental ω_0. ¿Es razonable afirmar que la respectiva respuesta en régimen será prácticamente sinusoidal pura? **JUSTIFICAR**.

Problema 3 (16 puntos)

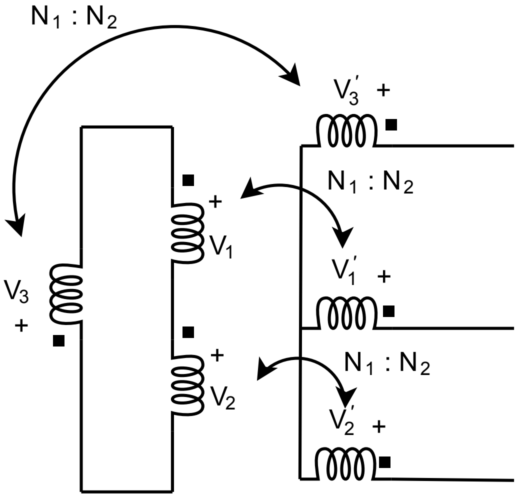


Figura 3: Transformador ideal trifásico $\Delta - Y$.

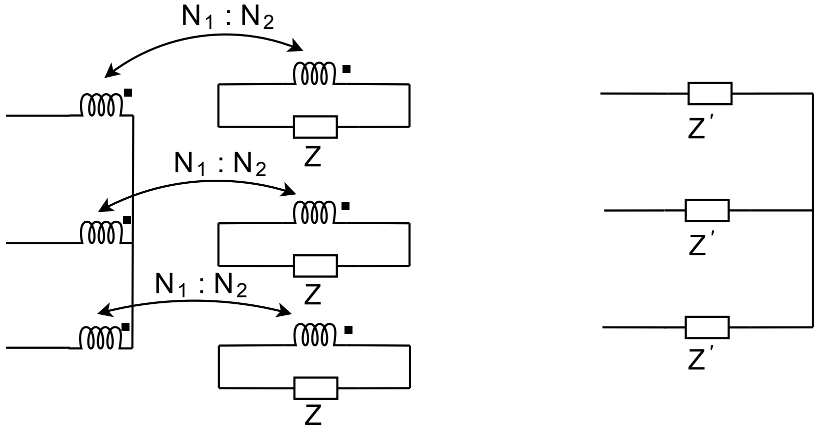


Figura 4: Circuitos trifásicos equivalentes.

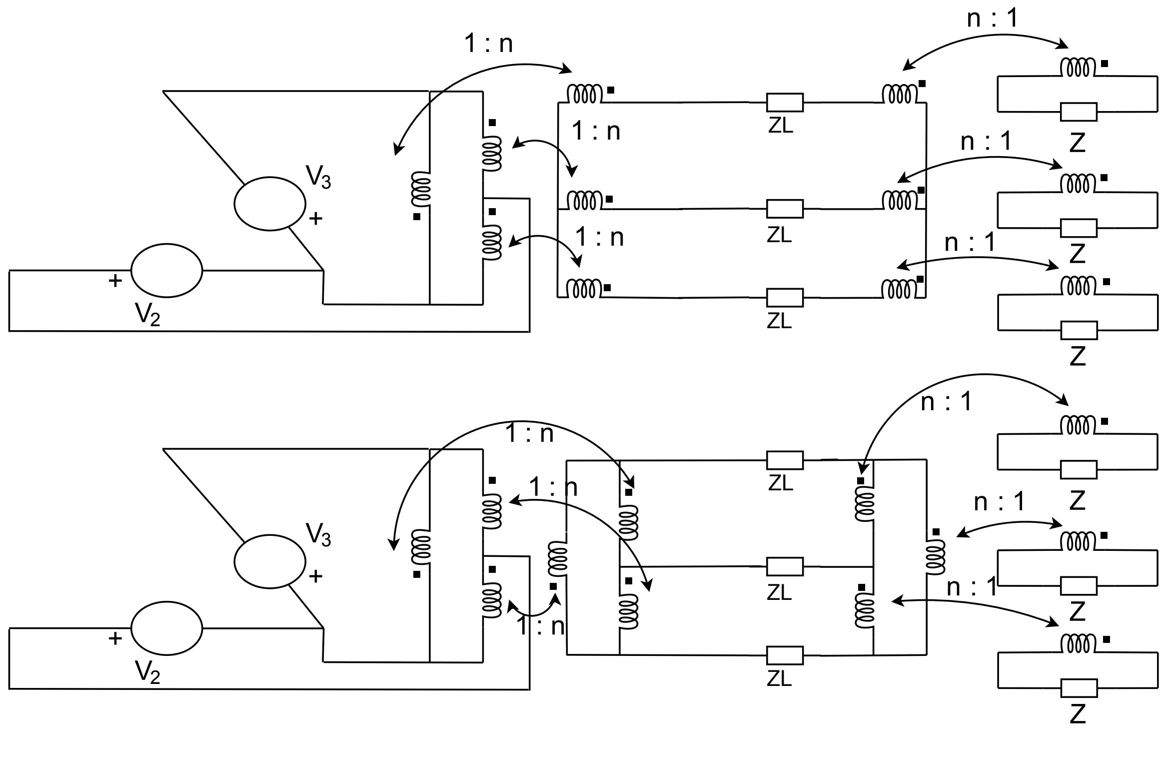
a) i) En la figura 3, hallar los fasores V_1', V_2' y V_3' (tensiones en bornes de las bobinas del secundario) en función de los fasores V_1, V_2 y V_3 (tensiones en bornes de las bobinas del primario). Hallar las tensiones compuestas (entre líneas), para el caso en que $V_1 = V\angle 0^o$, $V_2 = V\angle 120^o$, $V_3 = V\angle 240^o$.

ii) En la figura 4, hallar el valor que debe tener la impedancia Z' para que ambos circuitos trifásicos sean equivalentes.

b) En esta parte, V_2 y V_3 son como en la parte anterior y refiere a los dos ciruitos de la figura que sigue.

i) Hallar los módulos de las caídas de tensión en las impedancias de línea Z_L.

ii) Determinar en cuál de los dos circuitos la caída es menor, asumiendo que el módulo de Z_L es mucho menor que el de Z y que n es mucho mayor que 1.



Problema 4 (12 puntos)

Se considera el circuito de la figura, de transferencia en régimen $H(j\omega)$. Indicar, para cada una de las siguientes afirmaciones, si son verdaderas o falsas o si no se dispone de datos suficientes para hacer una afirmación, justificando claramente.

a) El circuito elimina el valor de continua de cualquier entrada periódica.

b) En alta frecuencia, el circuito presenta una ganancia aproximadamente constante, de -6 db.

c) En alta frecuencia, el circuito presenta una ganancia aproximadamente constante, de +3 db.

d) El circuito filtra las altas frecuencias.

e) El circuito presenta una banda de no distorsión en amplitud.

f) El circuito no distorsiona en amplitud solamente en una banda acotada.

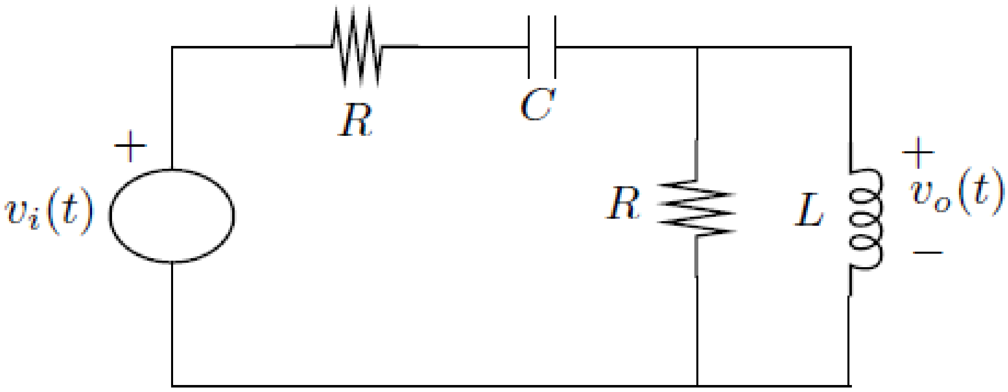
g) El circuito implementa un filtro pasabajos.

h) El circuito implementa un filtro pasa-banda.

i) El circuito no distorsiona en fase.

j) Existe una frecuencia de trabajo a la cual la ganancia del sistema es 0db.

k) Existe una frecuencia de trabajo a la cual la relación de fase entre la entrada y la salida es de +90 grados.



Solución

Problema 1

Parte a)
Ver notas del curso: Para funciones módulo integrables, se define su TdF así:

$$\mathcal{F}[g(t)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Parte b)
Ver notas del curso para el detalle de la notación: Para distribuciones temperadas, se define su TdF así: dada $T \in \mathcal{S}'$, se define $\mathcal{F}[T(t)](f) \in \mathcal{S}'$ como la distribución que actúa según la relación:

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

La definición es correcta porque $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}$. Parte c)
De acuerdo a la definición, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-j2\pi ft}dt \right|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \langle 1, \varphi \rangle$$

De donde $\mathcal{F}[\delta] = 1$.

Parte d)
Del cálculo directo (ver notas del curso) sale que

$$\mathcal{F}[\pi_T(t)](f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T.sinc(fT)$$

Resta realizar el bosquejo del módulo.

Parte e)
De lo anterior, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen^2(x)}{\pi^2 x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathcal{F}[\pi_1(t)](f)\right]^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1^2(t)dt = 1$$

donde hemos usado la Identidad de Parseval.

Parte f)
Aplicando la propiedad que dice que la TdF del producto ordinario es la convolución de las TdF de los factores, tenemos que la TdF de $w(t)$, que denotaremos $W(f)$, es la convolución de $sinc(f)$ con la suma de las TdF de los dos cosenos involucrados (usamos que $T = 1$). Por otro lado, sabemos que la TdF del coseno consiste en un par de Deltas de Dirac en la frecuencia del coseno. O sea:

$$\mathcal{F}[\cos(t)](f) = \frac{\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)}{2} \quad , \quad \mathcal{F}[\cos(10t)](f) = \frac{\delta\left(f - \frac{5}{\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{\pi}\right)}{2}$$

Sabemos que convolucionar con la Delta de Dirac corrida es equivalente a trasladar, por lo que:

$$W(f) = \left[\mathcal{F}[\cos(t)](f) + \mathcal{F}[\cos(10t)](f)\right] * sinc(f)$$

$$W(f) = \frac{1}{2}.sinc\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}.sinc\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}.sinc\left(f - \frac{5}{\pi}\right) + \frac{1}{2}.sinc\left(f + \frac{5}{\pi}\right)$$

Resta realizar el bosquejo del módulo; para esto podemos despreciar el solapamiento entre las curvas involucradas, ya que se da en los lóbulos menores del sinc; prestamos especial atención al lóbulo principal de cada sinc.

Problema 2

Parte a)
Planteamos las ecuaciones genéricas del transformador. Trabajamos directamente en fasores, considerando régimen sinusoidal.

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega I_1 + Mj\omega I_2 \\ V_2 &= 4Lj\omega I_2 + Mj\omega I_1 \end{cases}$$

Donde V_1 y V_2 son las tensiones de primario y secundario, medidas desde los puntos, e I_1 e I_2 las corrientes de primario y secundario, entrando por los puntos, respectivamente. Por ser un transformador perfecto, tenemos que $M = \sqrt{4L^2} = 2L$, de donde podemos ver que

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega I_1 + 2Lj\omega I_2 \\ V_2 &= 4Lj\omega I_2 + 2Lj\omega I_1 = 2\left(Lj\omega I_1 + 2Lj\omega I_2\right) = 2V_1 \end{cases}$$

Entonces, la transferencia pedida es $H_P(j\omega) = 2$. Observar que esta relación está determinada por la relación entre las bobinas y el hecho de qu eel trnsformador es perfecto.

Parte b)
Denotemos por V_1 la tensión en el nudo intermedio, que coincide con la del primario. La tensión de salida coincide con la del secundario. Por la parte a), sabemos que $V_o = 2V_1$, pues el razonamiento anterior sigue valiendo tal cual. Hallaremos V_1

Consideremos las corrientes del primario y del secundario, entrando por los puntos. Por Ley de Ohm fasorial,

$$I_2 = (V_1 - V_o)Cj\omega = -V_1 Cj\omega$$

De la ecuación de tensión del primario obtenemos:

$$V_1 = Lj\omega I_1 + 2Lj\omega I_2 = Lj\omega I_1 - 2Lj\omega V_1 Cj\omega \Rightarrow V_1\left(1 + 2LC(j\omega)^2\right) = I_1 Lj\omega$$

Entonces

$$I_1 = V_1\left[\frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega}\right]$$

Escribamos el nudo de tensión V_1:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = I_1 + I_2 = V_1\left[\frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega}\right] - V_1 Cj\omega$$

Entonces

$$\frac{V_i}{R} = V_1\left[\frac{1}{R} + \frac{1 + 2LC(j\omega)^2}{Lj\omega} - Cj\omega\right]$$

Operando, resulta

$$V_i Lj\omega = V_1(RLC(j\omega)^2 + Lj\omega + R) \Rightarrow V_1 = V_i\frac{Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2}$$

Luego de multiplicar por 2 para obtener V_o, tenemos que la transferencia del circuito en régimen sinusoidal es

$$H(j\omega) = \frac{2Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2} = \frac{2\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

Parte c)
Para obtener los Diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por bandas. El denominador es de

segundo orden, por lo que puede tener dos raíces reales o un par de raíces complejas conjugadas. Vemos que ocurre esto último, ya que el denominador puede escribirse como

$$(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2$$

con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = \omega_0$. La frecuencia crítica de discusión es pues ω_0.

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx 2\frac{\omega_0(j\omega)}{\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & \frac{2\omega}{\omega_0} \\ arg(H(j\omega)) & \approx & 90^o \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx 2\frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & \frac{2\omega_0}{\omega} \\ arg(H(j\omega)) & \approx & -90^o \end{cases}$$

Los Diagramas de Bode reales se muestran en la figura 5. En baja frecuencia el Diagrama de módulo muestra una pendiente de $+20db/dec$ y un adelanto de fase de 90 grados. En alta frecuencia, tenemos una pendiente de $-20db/dec$ y un atraso de fase de 90 grados. Para discriminar si el pasaje de +90 a -90 grados se hace a través del 0 o de 180, calculamos $H(j\omega_0)$:

$$H(j\omega_0) = 2$$

por lo que la fase va disminuyendo a medida que aumenta la frecuencia. Observemos que en ω_0 el sistema no introduce desfasaje y la ganacia es de $6db$.

Parte d)

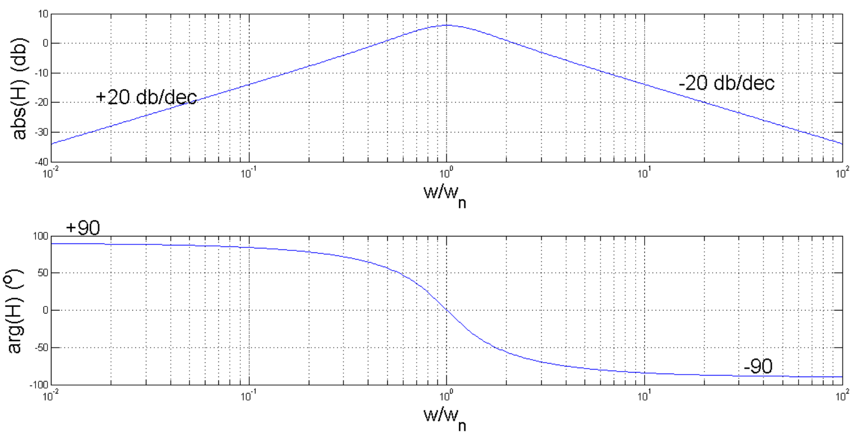


Figura 5:

La ganancia del sistema está dada por el módulo de la transferencia. Para determinar si existe al menos una frecuencia de trabajo con tales propiedades, imponemos $|H(j\omega_1)| = 4db$, o sea

$$|H(j\omega_1)| = 10^{1/5} \Rightarrow |H(j\omega_1)|^2 = 10^{2/5}$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada en la variable $x = \frac{\omega_1}{\omega_0}$, obtenemos dos soluciones posibles:

$$\omega_1 = 1,45\omega_0 \quad , \quad \omega_1 = 0,68\omega_0$$

lo que es consistente con el Diagrama de Bode de módulo, que muestra que $|H(j\omega_0)| = 6db$ y decrece continuamente hacia frecuencias mayores y menores.

Parte e)
La condición pedida es que la salida esté en fase con la entrada. Esto ocurre a frecuencia ω_0. A esta frecuencia, el sistema introduce una ganancia de $6db$, es decir, duplica la amplitud de la entrada.

Parte f)
Una entrada periódica de pulsación $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$, podemos describirla a través de su serie de Fourier

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{jn\omega_g t}$$

La respuesta en régimen del sistema a esta entrada periódica será

$$r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) H(jn\omega_g) e^{jn\omega_g t}$$

es decir, una señal también periódica, con la misma frecuencia que la entrada, y tal que cada coeficiente de Fourier se ve afectado por la transferencia del sistema evaluada en la frecuencia del respectivo armónico.

Entonces, para obtener una respuesta en régimen prácticamente sinusoidal pura, debe pasar un único armónico. La continua sabemos que no pasa porque el sistema la filtra. Como la fundamental está en ω_0, esta componente espectral duplica su amplitud. Por ser la entrada una onda cuadrada, no tiene armónicos pares, por lo que tenemos que ver en primer término qué sucede con el tercer armónico. La ganancia a esta frecuencia es

$$|H(j3\omega_0)| = \frac{6}{73} \approx 0.08$$

por lo que podemos despreciar el efecto de este armónico (y los armónicos superiores) a la salida y afirmar que la misma será una sinusoide pura, de pulsación ω_0.

Problema 3

Este ejercicio es el 3 del Práctico 10. Damos sólo algunas puntas de la solución.

En la parte a)-i), vemos que las tensiones V_i corresponden al primario de cada transformador ideal, en tanto las tensiones V_i' corresponden a los respectivos secundarios. Se cumple entonces que $V_i' = (\frac{N_2}{N_1})V_i$. Esto implica que podemos pensar que las líneas que salen del secundario *provienen* de un sistema trifásico de fuentes en estrella, equilibrado y perfecto, de fuentes

$$V_1' = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_1 \quad , \quad V_2' = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_2 \quad , \quad V_3' = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_3 \quad ,$$

Las respectivas tensiones compuestas se obtienen del sistema trifásico anterior dando un nuevo sistema trifásico equilibrado y perfecto, de amplitud $\sqrt{3}$ mayor y con un desfasaje de -30^o en este caso.

En la parte a)-ii), vemos que en cada secundario tenemos conectada una impedancia Z. Sabemos cómo se ve desde el primario de un trafo ideal una carga en el secundario. A pesar de que tenemos una conexión trifásica, las ecuaciones a plantear son las mismas que si los trafos estuvieran *aislados* (verificarlo). Entonces, podemos afirmar que el sistema de la derecha será equivalente al de la izquierda si

$$Z' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

En la parte b)-i) tenemos dos sistemas que tienen las mismas fuentes:

- el primero presenta un trafo trifásico $\Delta - Y$, la impedancia de línea Z_L, un trafo trifásico $Y - Y$ y una carga Z en estrella.
- el primero presenta un trafo trifásico $\Delta - \Delta$, la impedancia de línea Z_L, un trafo trifásico $\Delta - Y$ y una carga Z en estrella.

Lo primero que tenemos que obervar, por Kirchoff de mallas, es que el hecho de que hay dos fuentes, por com oestán conectadas, nos permite pensar que en realidad hay tres fuentes en triángulo, de valores respectivos

$V_1 = -(V_2 + V_3)$, V_2 y V_3.

Para el primer trafo del primer circuito, esto nos lleva a la situación de la parte a)-i). Completando esto con la parte a)-ii), obtenemos un circuito equivalente monofásico para el primer circuito, que nos permite calcular la caída en Z_L aplicando un divisor de tensión y obteniendo

$$\left|V_{Z_{L\,I}}\right| = \left|\frac{Z_L}{Z_L + n^2 Z}\right| . |nV_1|$$

Para el segundo circuito, las tensiones del secundario del primer trafo son las compuestas que ven las cargas, por lo que para obtener las tensiones de fase, debemos dividir entre $\sqrt{3}$ y rotar 30^o (esto último no afecta el módulo). Del lado del segundo trafo, las cargas Z pasan al primario en triángulo, por lo que podemos pasarlas a estrella dividiendo entre 3. Obtenemos entonces un equivalente monofásico que permite calcular:

$$\left|V_{Z_{L\,II}}\right| = \left|\frac{Z_L}{Z_L + n^2 \frac{Z}{3}}\right| . \frac{|nV_1|}{\sqrt{3}}$$

Para realizar la comparación de la parte b)-ii), usando que $n \gg 1$ y $|Z_L| \ll |Z|$ observemos que

$$\left|Z_L + n^2 Z\right| \approx |n^2 Z| \quad , \quad \left|Z_L + n^2 \frac{Z}{3}\right| \approx \left|n^2 \frac{Z}{3}\right|$$

Entonces, obtenemos que

$$\left|V_{Z_{L\,II}}\right| = \sqrt{3}\left|V_{Z_{L\,I}}\right|$$

Problema 4

Parte a)
Para ver qué pasa con la continua, podemos mirar el circuito en régimen de continua. Sabemos que en ese contexto, los condensadores se comportan como un circuito abierto, en tanto que las bobinas son cortocircuitos. El impedancia infinita del condensador bloquea la continua, por lo que la afirmación es correcta.

Partes b), c) y d)
En alta frecuencia, la impedancia del condensador se hace nula, en tanto que la de la bobina se hace infinita. En este contexto, el circuito en alta frecuecia se comporta como un divisor de tensión con dos resistencias iguales, teniendo una ganancia de $\frac{1}{2}$, o $-6db$. Por lo que la respuesta b) es correcta y la c) y la d) son incorrectas.

Parte e)
A esta altura sabemos que en alta frecuencia la ganancia es aproximaddamente constante, de valor asintótico $-6db$. La condición de no distorsión en amplitud es precisamente que el módulo sea constante, por lo que podemos afirmar que el circuito presenta una banda de frecuencia de no distorsión, conformada por frecuencias mayores a una cierta frecuencia de corte. Para determinarla, deberíamos ver a partir de cuándo es válida la aproximación asintótica de alta frecuencia.

Parte f)
La banda de no distorsión es infinita, extendiéndose hacia las altas frecuencias. Entonces la afirmación no es correcta.

Parte g)
La afirmación es falsa, ya que en alta frecuencia el circuito presenta una ganancia aproximadamente constante, sin filtrar. Además, elimina la continua.

Parte h)
La afirmación es falsa por la misma razón anterior.

Parte i)
Para responder esta parte, podemos calcular la transferencia del circuito (observar que el circuito es un divisor de tensión). Al hacerlo, y bosquejar el Diagrama de Bode de fase, observaremos que en baja frecuencia el circuito introduce un atraso/adelanto de 180 grados, en tanto en alta frecuencia no introduce retraso/adelanto. Vemos entonces que la fase del sistema no varía linealmente con la frecuencia, lo que indicaría distorsión en fase. Podríamos decir que en alta frecuencia no hay distorsión de fase, por la validez de la aproximación lineal del arcotangente, pero esto requiere un análisis más fino.

Parte j)
Observando la transferencia de sistema, vemos que el módulo de la misma podría ser mayor que uno si el denominador tuviera raíces complejas conjugadas, con un ζ chico. Si las raíces fueran reales, el módulo sería siempre menor que 1. Nos faltan datos.

Parte k)
De la continuidad del argumento de la transferencia, de sus valores asintóticos en baja y alta frecuencia y del hecho de que las raíces del denominador tienen parte real negativa, podemos afirmar que existe una frecuencia de trabajo a la cual se cumple lo expresado.