# Sistemas Lineales 1

## Segundo parcial

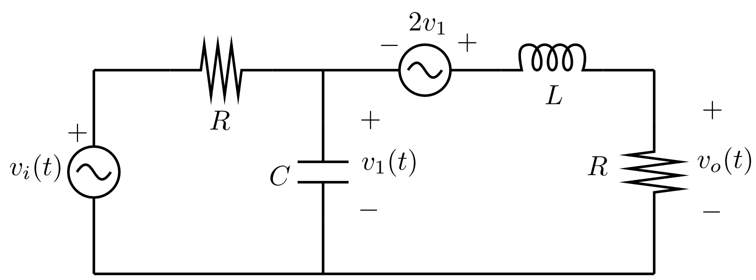
## $1^{er}$ semestre 2013

**Recomendaciones generales:**

- **Lea atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte**.
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio**.
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta**.
- **HAGAR PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS**.
- **PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS**.
- **Se recuerda que la prueba es individual**.
- **Al finalizar, coloque las hojas dentro del sobre amarillo y entréguelo al docente del salón**.

## Problema 1 (18 puntos)

Se considera el sistema de la figura.

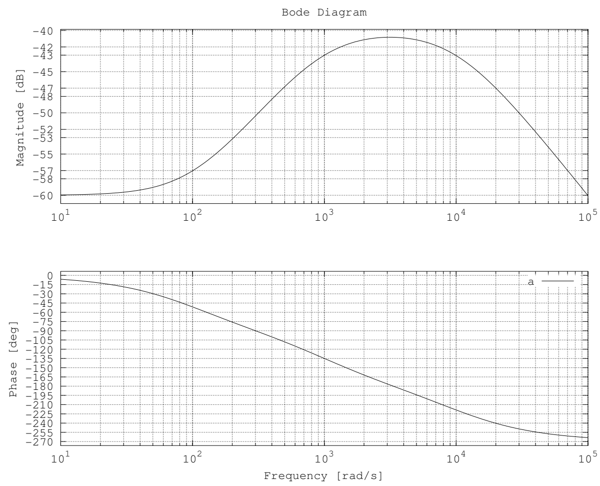



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, observando que resulta ser real racional estríctamente propia, de orden 2 en el denominador y orden 0 en el numerador.

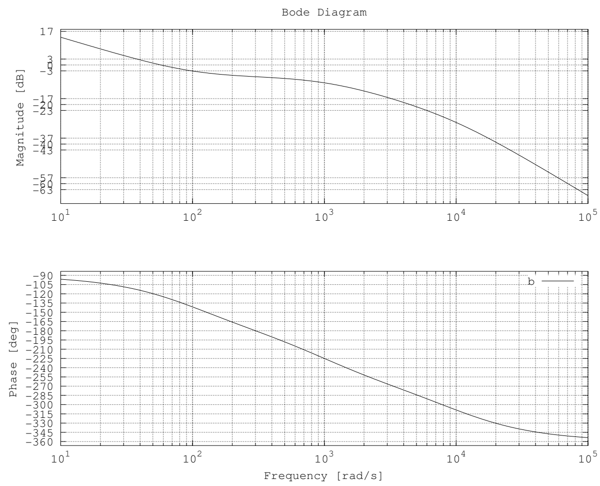
b) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0 > 0$ y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando detalladamente el proceso de obtención de los mismos.

c) Elegir una frecuencia baja, una frecuencia media y una frecuencia alta, explicando por qué las define de esa manera y, para dichas frecuencias, hallar las distancias entre el Diagrama de módulo real y el asintótico, expresadas en decibeles.

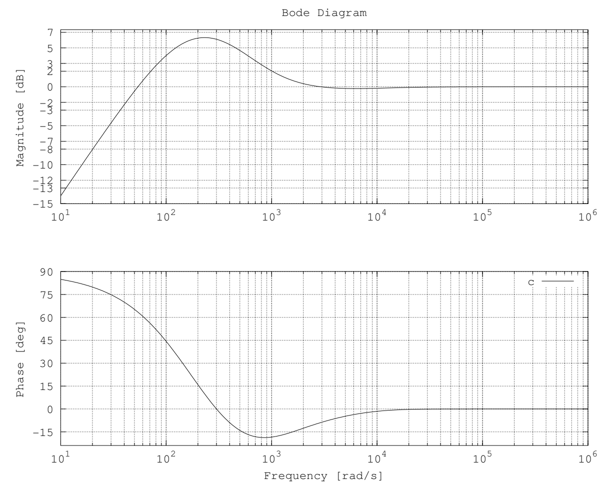
d) Hallar una frecuencia de trabajo a la cual el sistema presenta una ganancia de 20db.




a)




b)




c)

$$H_1(j\omega) = \frac{\omega_0^2(\omega_0 - j\omega)}{j\omega(j\omega + 10\omega_0)(j\omega + 100\omega_0)}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{\omega_0(\omega_0 - j\omega)}{(j\omega + 10\omega_0)(j\omega + 100\omega_0)}$$

$$H_3(j\omega) = \frac{j\omega(j\omega^2 + 1.1 \times 10^4 j\omega + 10^7)}{j\omega^3 + 1.1 \times 10^4\omega_0 j\omega^2 + 5 \times 10^6\omega_0^2 j\omega + 5 \times 10^8\omega_0^3}$$

## Problema 2 (14 puntos)

Se consideran tres Diagramas de Bode y tres transferencias en régimen, donde $\omega_0 = 1\frac{rad}{s}$.

a) Determinar a cuál de cada una de las transferencias corresponde cada uno de los Diagramas. Justificar en cada caso por qué se elige cada transferencia para cada Diagrama, y por qué no son válidas las restantes. **No es válido justificar por descarte**

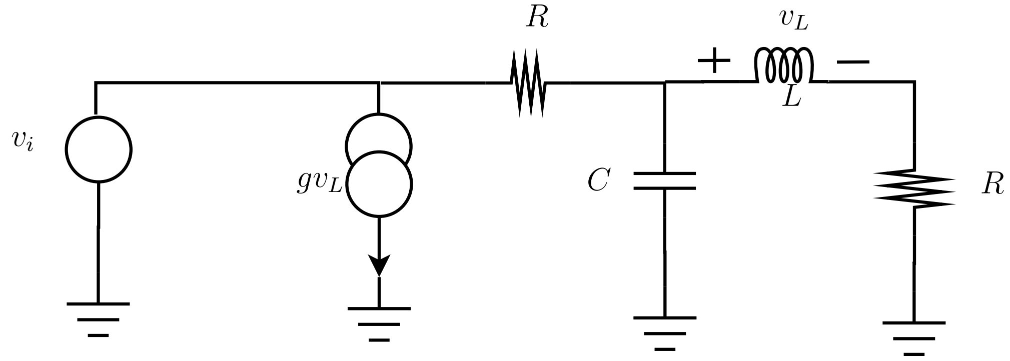
b) ¿Cuál de las transferencias tiene menor ganancia en continua?

c) ¿Cuál de las transferencias logra el mayor retraso de la salida respecto a la entrada en alguna frecuencia?

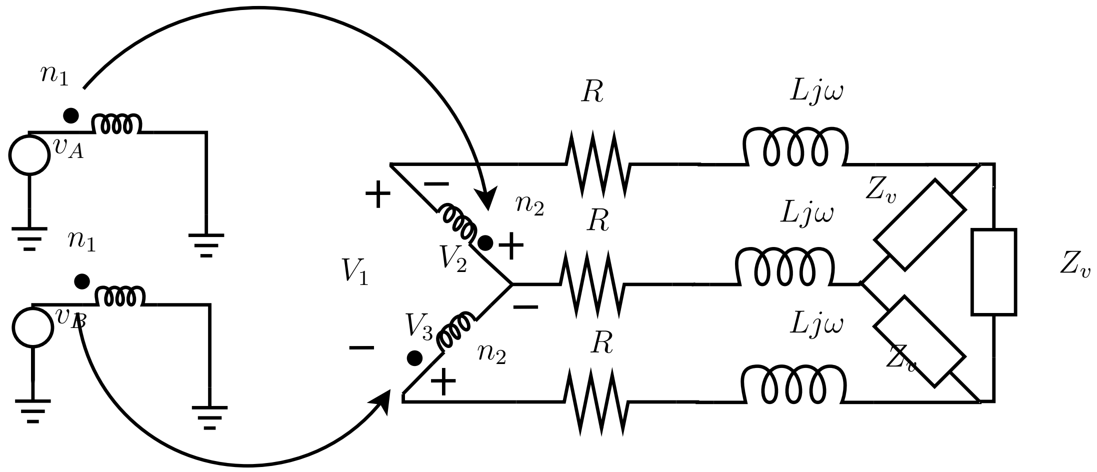
d) Para cada una de las transferencias, determinar la salida en régimen si la entrada es $x(t) = A\cos(1000\omega_0 t + 45^o)$.

## Problema 3 (16 puntos)

a) Hallar la impedancia vista por la fuente en el circuito de la siguiente figura




Se considera el circuito de la siguiente figura




b) Sabiendo que $v_A(t) = 230kV\sqrt{2}sen(\omega t - 5\pi/6)$, $v_B(t) = 230kV\sqrt{2}sen(\omega t + \pi/2)$. y $\frac{n_1}{n_2} = 1000$, hallar la expresión temporal de la tensión $v_1(t)$. Hallar un sistema de fuentes trifásico en estrella, equivalente al dado, que alimente las líneas y las cargas.

c) Hallar las expresiones temporales de las corrientes y tensiones en las cargas ($Z_v$), sabiendo que: $R = 10\Omega$ , $L = 650\mu F$ , $C = 2\mu F$ y $g = 0.15$ mho.

d) Hallar las corrientes por las líneas. Hallar la potencia aparente consumida en las cargas y en las líneas. Hallar la potencia aparante que entrega el sistema de fuentes.

## Problema 4 (12 puntos)

Sean $A$, $T$ positivos y $\lambda_0 \gg \frac{1}{T}$. Se considera un circuito lineal, del cual se sabe que para una entrada impulsiva, la respectiva respuesta es

$$h(t) = \frac{2A}{T}.sinc\left(\frac{2t}{T}\right).\cos\left(2\pi\lambda_0 t\right)$$

a) Bosquejar el espectro de $h(t)$.

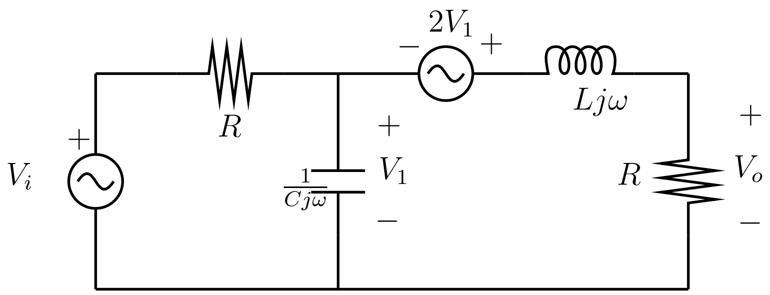
b) ¿Si a la entrada del sistema se coloca la señal $x(t) = \cos(2\pi\lambda_0 t) + \cos(4\pi\lambda_0 t)$, cuál será la respectiva respuesta $y(t)$?

c) Observando su respuesta al impulso, indicar si el sistema es causal.

**Solución**

## Problema 1

Parte a)
Consideremos el circuito en fasores y planteemos el nudo de tensión $V_1$:




$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 Cj\omega + \frac{V_o}{R} \Rightarrow \frac{V_i}{R} = V_1\left(\frac{1}{R} + Cj\omega\right) + \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_i = V_1\left(1 + RCj\omega\right) + V_o$$

Por otro lado, la Ley de Kirchoff para la segunda malla nos dice que

$$V_1 = -2V_1 + Lj\omega.\frac{V_o}{R} + V_o \Rightarrow$$

$$\frac{3V_1}{Lj\omega + R} = \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_1 = \frac{(Lj\omega + R)}{3R}V_o$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, resulta

$$V_i = V_o\frac{(Lj\omega + R)}{3R}\left(1 + RCj\omega\right) + V_o = V_o\left(1 + \frac{(1 + RCj\omega)(Lj\omega + R)}{3R}\right) \Rightarrow$$

$$V_i = V_o\left(\frac{3R + R + Lj\omega + R^2Cj\omega + RLC(j\omega)^2}{3R}\right) \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{3R}{4R + (L + R^2C)(j\omega) + RLC(j\omega)^2} = \frac{\frac{3}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)(j\omega) + \frac{4}{LC}}$$

Parte b)
Para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, entonces $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ y tenemos que

$$H(j\omega) = \frac{3\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\omega_0(j\omega) + 4\omega_0^2}$$

Observemos que $H$ tiene orden 2 en el denominador y orden 0 en el numerador. Calculemos las raíces del polinomio asociado al denominador

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Entonces tenemos dos raíces complejas conjugadas $(-1 \pm j\sqrt{3})\omega_0$, de módulo $2\omega_0$ y un valor de $\zeta = \frac{1}{2}$. La discusión de la aproximación asintótica de los Diagramas de Bode debe hacerse discutiendo según el módulo de las raíces $(2\omega_0)$. Esta frecuencia separa las bajas de las altas frecuencias.

$$\omega \ll 2\omega_0 \Rightarrow \quad H(j\omega) \approx \tfrac{3\omega_0^2}{4\omega_0^2} = \tfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|(db) & = & 20\log(\frac{3}{4}) \\ arg(H(j\omega)) & = & 0(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

$$\omega \gg 2\omega_0 \Rightarrow \quad H(j\omega) \approx \tfrac{3\omega_0^2}{(j\omega)^2} = \quad \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|(db) & = & 20\log(3\omega_0^2) - 40\log(\omega) \\ arg(H(j\omega)) & = & \pm\pi(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

Para discriminar si la variación es de $+\pi$ o $-\pi$, calculamos $H(j\omega)$ en $\omega = 2\omega_0$:

$$H(j2\omega_0) = \frac{3\omega_0^2}{(j2\omega_0)^2 + 2\omega_0(j2\omega_0) + 4\omega_0^2} = \frac{3\omega_0^2}{-4\omega_0^2 + j4\omega_0^2 + 4\omega_0^2} = \frac{3\omega_0^2}{j4\omega_0^2} = \frac{3}{j4}$$

Vemos que la respectiva fase es de $-\frac{\pi}{2}$, por lo que tenemos un retraso de fase hacia $-\pi$. Los Diagramas de Bode reales se muestran en la figura 1. Las asíntotas de alta y baja frecuencia del Diagrama de módulo son, respectivamente, una recta horizontal a $20\log(3/4)db$ y una recta a $-40db/dec$. Las asíntotas de alta y baja frecuencia del Diagrama de fase son, respectivamente, rectas horizontales a $0^o$ y $-180^o$. Observamos que la fase es continua entre ambas asíntotas.

Parte c)

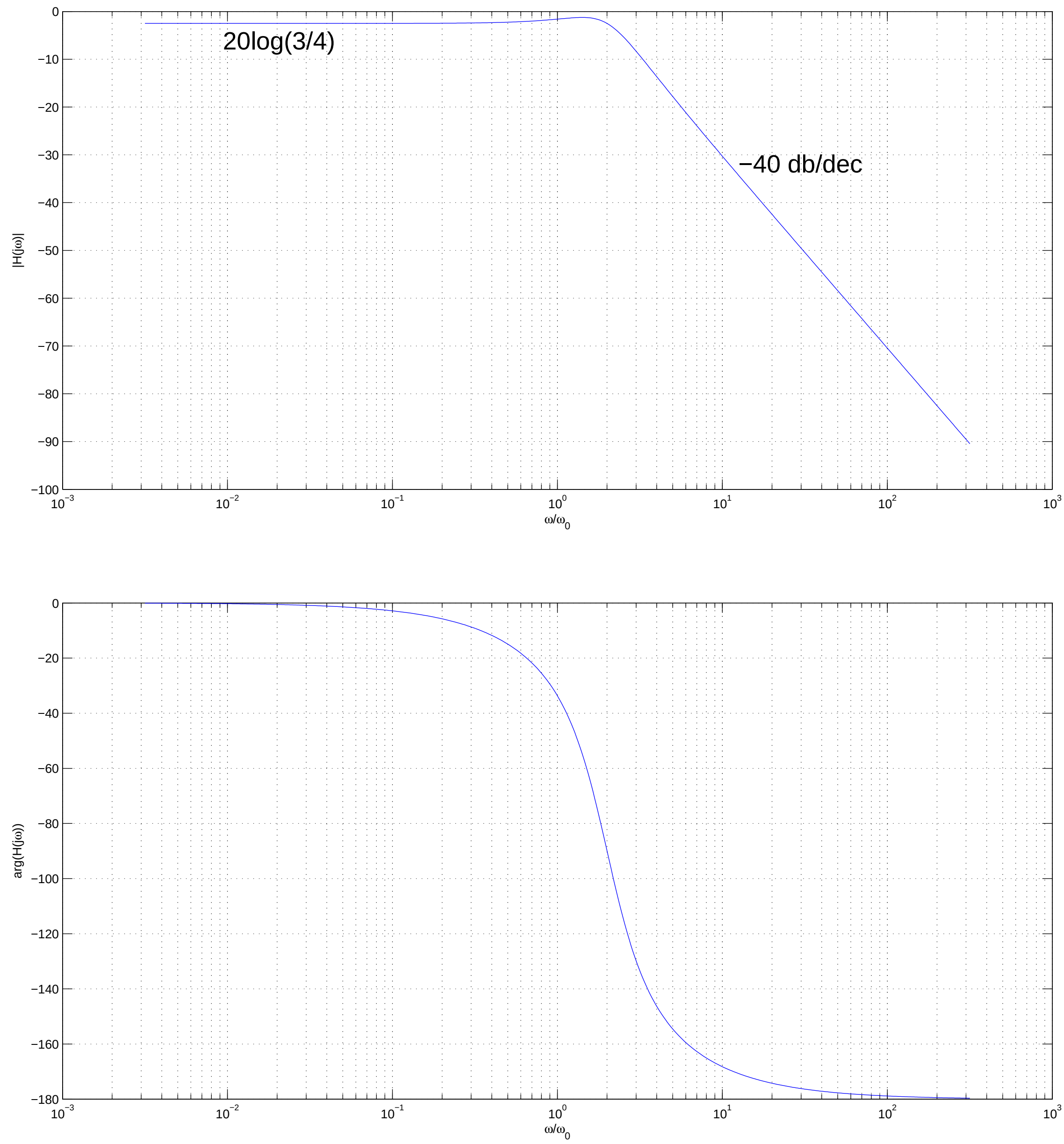



Figura 1: Diagramas de Bode reales y asintóticos del Problema 1.

Consideramos la frecuencia crítica $2\omega_0$ y elegimos la frecuencia baja $\omega_0$, una octava por debajo de ella, y la frecuencia $20\omega_0$, una década por encima. Para estas tres frecuencias, calculamos las distancias en db entre los Diagramas de Bode de módulo real y asintótico en decibeles:

$$dist(db) = 20\log\left(\frac{|H_{re}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right)$$

| $\omega$ | $\lvert H_{re}(j\omega)\rvert$ | $\lvert H_{as}(j\omega)\rvert$ | $dist\, re - as(db)$ |
|---|---|---|---|
| $\omega_0$ | $\frac{3}{\sqrt{13}}$ | $\frac{3}{4}$ | $20\log\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\right) \approx 1$ |
| $2\omega_0$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $20\log(1) = 0\ (consistente\, \zeta = \frac{1}{2})$ |
| $20\omega_0$ | $\frac{3}{\sqrt{396^2+400}}$ | $\frac{3}{400}$ | $20\log\left(\frac{400}{\sqrt{396^2+400}}\right) \approx 0,076$ |

Parte d)

Para encontrar una frecuencia de trabajo a la cual el sistema introduzca una ganancia de $20db$, tenemos que tener presente que para una entrada sinusoidal pura $A.\cos(\omega_1 t)$, el sistema responde en'régimen con otra sinusoidal pura de la forma

$$A.|H(j\omega_1)|.\cos\left(\omega_1 t + arg(H(j\omega_1))\right)$$

Entonces, podemos fijarnos en el Diagrama de Bode de módulo para ver si el mismo corta la recta horizontal de $20db$ para alguna frecuencia. De l aobservación directa es claro que no hay solución, incluso teniendo en cuenta la aproximación asintótica. Hagamos el planteo analítico.

$$|H(j\omega_1)| = 20db \Rightarrow |H(j\omega_1)| = 10 \Rightarrow$$

$$10 = \frac{3\omega_0^2}{\sqrt{(4\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_0^2\omega_1^2}} \Rightarrow 100 = \frac{9\omega_0^4}{(4\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_0^2\omega_1^2}$$

$$100(16\omega_0^4 + \omega_1^4 - 8\omega_0^2\omega_1^2 + 4\omega_0^2\omega_1^2) = 9\omega_0^4$$

Tenemos entonces una eucación bicuadrada en $\omega_1$. Llamando $x = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$, buscamos las raíces positivas de

$$x^2 - 4x + \left(16 - \frac{9}{100}\right) = 0$$

Sin necesidad de resolverla, observando nomás los cambios de signos en los coeficientes, vemos que no tiene raíces positivas, por lo que no existe la frecuencia de trabajo $\omega_1$ buscada.

## Problema 2

a) $H_1$ La transferencia $H_1$ tiene un raíz nula en el denominador, el cual tiene mayor orden que el numerador, por lo tanto el único diagrama que se corresponde en módulo es el b). Adicionalmente verificamos que la fase arranca en $-\frac{\pi}{2}$ y termina en $-2\pi$ consistente con las singularidades de $H_1$.

Las otras dos transferencias no tienen raíz nula en el denominador, por lo que no puede corresponderse con este diagrama.

$H_2$ La transferencia $H_2$ es la única que no tiene raíz nula en el denominador y es, por lo tanto, la única consistente con el diagrama a). Verificamos que como es estrictamente propia el diagrama de Bode de módulo termina yendo a $-\infty$.

$H_3$ Esta transferencia es la única que tiene una raíz nula en el numerador y por lo tanto la única compatible con el diagrama c). También vemos que es la única que tiene igual orden en el numerador que en el denominador por lo que el límite cuando $\omega$ tiende a infinito es una constante no nula.

b) La ganancia del sistema está directamente relacionada con el módulo de su transferencia en régimen. En particular, en continua, la transferencia $H_3$ tiene ganancia nula, $H_1$ infinita y $H_2$ una constante no nula. Por lo tanto es $H_3$.

c) El esfasaje que introduce un sistema está directamente relacionado con la fase de su transferencia en régimen. Según los diagramas de Bode, vemos que la transferencia que tiene mayor retraso de fase es la correspondiente al diagrama b) que es la $H_2$; esto ocurre a frecuencias altas.

**Nota:** Dado que un retraso mayor a 180 se puede ver como un adelanto, una respuesta válida sería que tanto la a) como la b) logran el máximo retraso posible de 180.

d) De los diagramas de Bode podemos obtener la ganancia y el retraso de la salida para cada sistema.

$H_1$ Del diagrama b): la atenuación es aproximadamente $10db$ y el desfasaje $-225$, por lo tanto la salida es: $y(t) = \dfrac{A}{\sqrt{10}} \cos(1000\omega_0 t - 180) = 0.316A \cos(1000\omega_0 t - 180)$

$H_2$ Del diagrama a): la atenuación es aproximadamente $43db$ y el desfasaje $-135$, por lo tanto la salida es: $y(t) = \dfrac{A}{100\sqrt{2}} \cos(1000\omega_0 t - 90) = 7.07 \times 10^{-3} A \cos(1000\omega_0 t - 90)$

$H_3$ Del diagrama c): la ganancia es aproximadamente $2db$ y el desfasaje $-17$, $10^{2/20} = 1.26$ por lo tanto la salida es: $y(t) = 1.26A \cos(1000\omega_0 t + 28)$

## Problema 3

**a)** Para hallar la impedancia vista por la fuente del circuito de la figura se debe hallar el cociente:

$$Z_V = \frac{V_i}{I} \tag{0.1}$$

siendo I la corriente que entrega la fuente de tensión $V_i$.

Planteando KCL resulta que:

$$I = gV_L + \frac{V_i - V_C}{R} \tag{0.2}$$

siendo $V_c$ la tensión en bornes de C.

Una vez más planteando KCL resulta que:

$$\frac{V_i - V_C}{R} = V_C j\omega C + \frac{V_L}{j\omega L} \tag{0.3}$$

Por divisor de tensión podemos hallar una relación entre $V_L$ y $V_C$:

$$V_C - V_L = \frac{R}{R + j\omega L} V_C \tag{0.4}$$

Operando con las ecuaciones de (1) a (4) resulta que:

$$\frac{1}{Z_v} = \frac{1}{R} + \frac{gj\omega L(gR - 1) - R}{(j\omega)^2 RLC + (j\omega)(L + R^2 C) + 2R} \tag{0.5}$$

$$\boxed{Z_v = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{gj\omega L(g - 1/R) - 1}{(j\omega)^2 RLC + (j\omega)(L + R^2 C) + 2R}}} \tag{0.6}$$

**b)** Planteando la ley de Faraday para los transformadores ideales resulta que:

$$\frac{V_2}{n_2} = \frac{V_A}{n_1} \tag{0.7}$$

$$\frac{V_3}{n_2} = \frac{V_B}{n_1} \tag{0.8}$$

Además, por KVL:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \tag{0.9}$$

De (7), (8) y (9) resulta que:

$$v_1(t) = -(v_2(t) + v_3(t)) = -\frac{n_2}{n_1}(v_A(t) + v_B(t)) \tag{0.10}$$

Entonces:

$$\boxed{v_1(t) = 230V\sqrt{2}sen(\omega t - \pi/6)} \tag{0.11}$$

Para pasar de un sistema de fuentes en estrella a triángulo sabemos que debemos dividir a las tensiones del triángulo entre $\sqrt{3}$ y agregar un desfasaje de 30º. Por más detalles ver el capítulo 6 de las notas del curso.

Entonces, las tensiones del equivalente estrella se obtienen sumando 30º a las fases del triángulo. El resultado queda como sigue:

$$\boxed{v_{1Y}(t) = 230V\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t)} \tag{0.12}$$

$$\boxed{v_{2Y}(t) = 230V\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t - 2\pi/3)} \tag{0.13}$$

$$\boxed{v_{3Y}(t) = 230V\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t + 2\pi/3)} \tag{0.14}$$

**c)** Sustituyendo los parámetros dados en la letra del problema podemos calcular la impedancia vista de la parte **a)**:

$$Z_v = 19.995\Omega < -0.015rad \tag{0.15}$$

Esta parte puede ser resulta de dos formas diferentes: 1) trabajando con el sistema de fuentes en triángulo y 2) trabajando con el equivalente de fuentes en estrella dado. Lo haremos por las dos formas y llegaremos a los mismos resultados:

**1) Fuentes en triángulo:**

Transfiguramos las cargas de triángulo a estrella. En éste caso por cada fase nos queda la serie: $R - L - Z_v/3$. Si ahora pasamos de vuelta al triángulo nos queda una impedancia de: $3R + 3j\omega L + Z_v$. Por lo tanto las corrientes por $Z_v$ quedan así:

$$I_{Zi} = \frac{V_i}{3R + 3j\omega L + Z_v} \tag{0.16}$$

Pasando al tiempo:

$$\boxed{i_{Z1}(t) = 6.506Asen(\omega t - 0.530rad)} \tag{0.17}$$

$$\boxed{i_{Z2(t)} = 6.506Asen(\omega t - 2.624rad)} \tag{0.18}$$

$$\boxed{i_{Z3}(t) = 6.506Asen(\omega t + 1.565rad)} \tag{0.19}$$

Las tensiones en las cargas se pueden hallar por divisor de tensión:

$$V_{Zi} = \frac{Z_v}{3R + 3j\omega L + Z_v} V_i \tag{0.20}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{v_{Z1}(t) = 130.091V sen(\omega t - 0.544rad)} \tag{0.21}$$

$$\boxed{v_{Z2(t)} = 130.091V sen(\omega t - 2.63rad)} \tag{0.22}$$

$$\boxed{v_{Z3}(t) = 130.091VV sen(\omega t + 1.55rad)} \tag{0.23}$$

**1) Fuentes en estrella:**

Trabajando con el equivalente estrella podemos hallar la tensión fase-neutro sobre la impedancia $Z_v/3$:

$$V_{ZNi} = \frac{Z_v/3}{R + j\omega L + Z_v/3} V_{iY} = \frac{Z_v}{3R + 3j\omega L + Z_v} V_{iY} \tag{0.24}$$

Por lo tanto:

$$v_{ZN1}(t) = 75.108V sen(\omega t - 0.021rad) \tag{0.25}$$

$$v_{ZN2}(t) = 75.108V sen(\omega t - 2.116rad) \tag{0.26}$$

$$v_{ZN3}(t) = 75.108V sen(\omega t + 2.073rad) \tag{0.27}$$

Ahora bien, para hallar la tensión sobre la impedancia real (la que está conectada en triángulo) sólo tenemos que restar las tensiones fase neutros:

$$v_{Z1}(t) = v_{ZN1}(t) - v_{ZN2}(t) = 130.091V sen(\omega t - 0.544rad) \tag{0.28}$$

$$v_{Z2}(t) = v_{ZN2}(t) - v_{ZN3}(t) = 130.091V sen(\omega t - 2.63rad) \tag{0.29}$$

$$v_{Z3}(t) = v_{ZN3}(t) - v_{ZN1}(t) = 130.091V sen(\omega t + 1.55rad) \tag{0.30}$$

Teniendo las tensiones fase sobre las impedancias podemos hallar la corriente que consumen dichas impedancias vía ley de Ohm:

$$I_{Z1} = \frac{V_{Z1}}{Z_v} = 6.506A < -0.530rad \tag{0.31}$$

$$I_{Z2} = \frac{V_{Z2}}{Z_v} = 6.506A < -2.624rad \tag{0.32}$$

$$I_{Z3} = \frac{V_{Z3}}{Z_v} = 6.506A < 1.565rad \tag{0.33}$$

**d)** Las corrientes por las líneas se pueden obtener planteando KCL a la carga:

$$I_{L1} = I_{Z1} - I_{Z2} = 11.267A < -0.001rad \tag{0.34}$$

$$I_{L2} = I_{Z2} - I_{Z3} = 11.267A < -2.100rad \tag{0.35}$$

$$I_{L3} = I_{Z3} - I_{Z1} = 11.267A < 2.089rad \tag{0.36}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{i_{L1}(t) = 11.267Asen(\omega t - 0.001rad)} \tag{0.37}$$

$$\boxed{i_{L2}(t) = 11.267Asen(\omega t - 2.100rad)} \tag{0.38}$$

$$\boxed{i_{L3}(t) = 11.267Asen(\omega t + 2.089rad)} \tag{0.39}$$

La potencia aparente consumida por las cargas se puede calcular a partir de su definición:

$$\boxed{S_Z = V_{Zi}I_{Zi}* = 3\frac{1}{2}(130.091V)(6.506A) < -0.015rad = 1.27kVA < -0.015rad} \tag{0.40}$$

Lo anterior también vale para las líneas, pero para eso necesitamos calcular el voltaje al que está sometido la línea. Notemos que dicho voltaje se puede obtener como la diferencia entre el voltaje que impone cada fuente en estrella y el voltaje fase-neutro en cada carga:

$$V_{ZL1} = 230V\sqrt{\frac{2}{3}} - 75.108VV < -0.021rad =< 112.713V < 0.014rad \tag{0.41}$$

$$V_{ZL2} = 230V\sqrt{\frac{2}{3}} < -2\pi/3 - 75.108V < -2.116rad =< 112.714V < -2.08rad \tag{0.42}$$

$$V_{ZL3} = 230V\sqrt{\frac{2}{3}} < 2\pi/3 - 75.108V < 2.073rad =< 112.715V < 2.11rad \tag{0.43}$$

$$\boxed{S_{ZL} = V_{ZLi}I_{ZLi}* = 3\frac{1}{2}(112.715V)(11.267A) < -tan^-1\frac{10\Omega}{650\mu F} = 1.905kVA < -1.57rad} \tag{0.44}$$

Por conservación de la energía resulta que la potencia que entrega el sistema de fuentes es la suma de la consumida en las líneas y en las cargas:

$$\boxed{S_{FUENTES} = 1.27kVA < -0.015rad + 1.905kVA < -1.57rad = 2.306kVA < -0.989rad} \tag{0.45}$$

## Problema 4

Este ejercicio corresponde al hoja 9 del práctico.