

Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2012

Recomendaciones generales:

- Lee atentamente todos los ejercicios y asegurate de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambia a otro y vuelve a él más tarde. No demores mucho tiempo en un solo ejercicio.
- **SE PROLIJO Y EXPLICA Y DETALLA BIEN TODOS TUS PASOS.** Expresa tus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerda que a través de esta evaluación, debes demostrar tus conocimientos de la asignatura. Ten presente que si algo no es claro para el evaluador, podrías perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- **REALIZA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PON TU NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- Recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, coloca las hojas dentro del sobre amarillo y entrégalo al docente del salón.

Problema 1 (13 puntos)

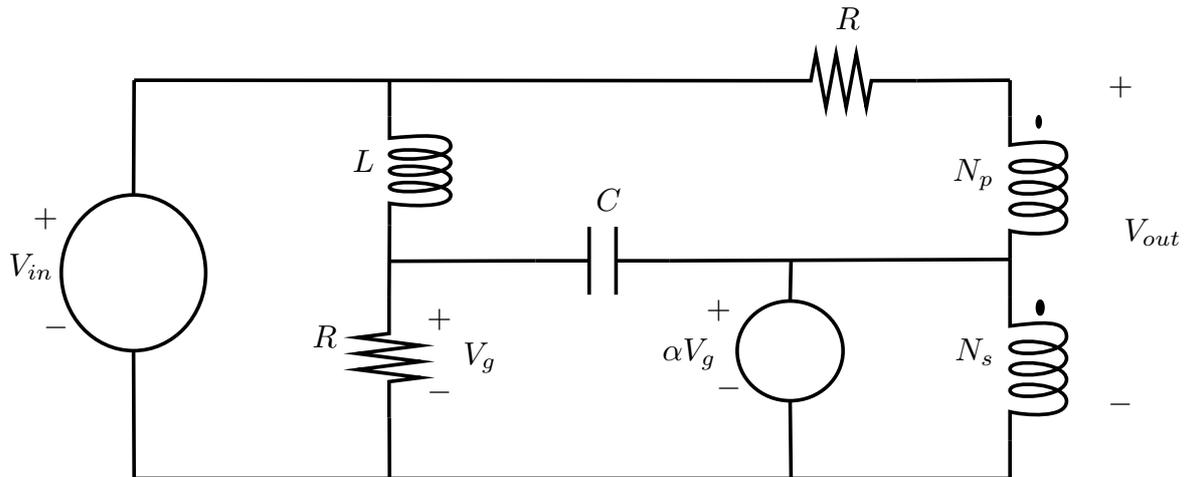
Se definen las funciones $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ y $p_{x_0}(x) = 1$ si $|x| < \frac{x_0}{2}$ y $p_{x_0}(x) = 0$ si $|x| > \frac{x_0}{2}$. Se sabe que

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(f_0 t)](f) = \frac{1}{f_0} \cdot p_{f_0}(f) \quad , \quad \mathcal{F}[p_T(t)] = T \cdot \text{sinc}(Tf)$$

($f_0 > 0$, $T > 0$).

- a. Mostrar que el $\text{sinc}(f_0 t)$ es una señal de energía finita y calcular su energía.
- b. Se considera una señal $e(t) = \text{sinc}(f_0 t)$, $f_0 > 0$. Esta señal se inyecta a la entrada de un sistema lineal, cuyo comportamiento en frecuencia es el de un pasabajos ideal, de frecuencia de corte $f_C > 0$. Denotemos por $E(e)$ y $E(r)$ las energías de la entrada y la respuesta respectivamente.
 - i) Mostrar $E(r) \leq E(e)$.
 - ii) Hallar f_C , en función de f_0 , para que la energía de la respuesta sea exactamente la tercera parte de la de la entrada.

Problema 2 (16 puntos)



- a. En el circuito de la siguiente figura hallar transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$. Se sugiere primero hallar la relación entre V_i y V_g .
- b. De aquí en adelante se cumple que: $\frac{N_p}{N_s} = \frac{1}{3}$, $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ ($\omega_0 > 0$) y $\alpha = -3$. Hallar una relación entre $\frac{L}{R}$ y ω_0 para que

$$H(j\omega) = \frac{-\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{5}{4}\omega_0(j\omega) + \frac{\omega_0^2}{4}}$$

- c. Realizar los Diagrama de Bode **asintóticos** para el módulo y la fase de $H(j\omega)$. **Justificar todos los pasos claramente.**
- d. Hallar la salida del sistema cuando la entrada es:

$$v_{in}(t) = V_p\sqrt{2}\cos(\omega_0 t + \pi/2) + V_p\sqrt{2}\sen(\omega_0 t - \pi/2)$$

Problema 3 (20 puntos)

- a. La figura 1 muestra el modelo de una carga trifásica balanceada en triángulo ($Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z = R + jX$), conectada a un sistema de fuentes perfecto también en triángulo, donde el valor eficaz de cada fuente es V_{eff} .

Calcular las potencias activa, reactiva y aparentes totales entregadas por el sistema de fuentes en función de V_{eff} y Z .

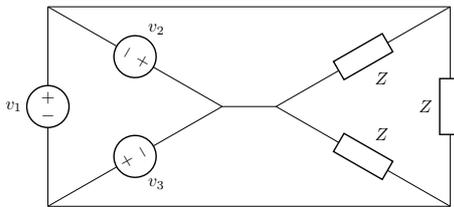


Figura 1: Modelo del sistema

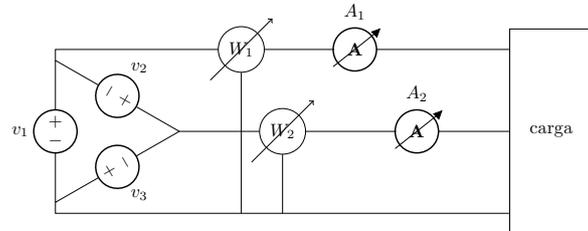


Figura 2: Esquema del ensayo

- b. El esquema de la figura 2 representa un ensayo realizado a una carga trifásica, no necesariamente balanceada, sin neutro. Los vatímetros sensan los valores eficaces de las tensiones de las líneas 1 y 2 referidas a la línea 3, U_{13} , U_{23} , y las corrientes por las líneas 1 y 2, I_{L1} , I_{L2} respectivamente. (Las líneas se numeran según el borne positivo de cada fuente). La medida es el producto del valor eficaz de la tensión por el valor eficaz de la corriente por el coseno del desfase entre ambas señales. Los amperímetros miden los valores eficaces de las corrientes de línea I_{L1} , I_{L2} .

De los instrumentos de medida se obtienen los siguientes valores:

$$|I_1| = |I_2| = 5A, \quad P_1 = 1100W \quad P_2 = 550W$$

Se sabe que las cargas son todas inductivas.

Las fuentes son sinusoidales, de pulsación $\omega = 314rad/s$, dadas por las siguientes expresiones:

$$v_1(t) = 311V \cos(\omega t), \quad v_2(t) = 311V \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}), \quad v_3(t) = 311V \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})$$

- i) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente totales entregadas por las fuentes. *Justifique.*
- ii) ***De aquí en más asumimos que el sistema de cargas es balanceado (las cargas de todas las fases son iguales).***
Hallar los fasores (en valores eficaces) asociados a las corrientes de línea I_{L1} , I_{L2} e I_{L3} .
- iii) Hallar un sistema de cargas en triángulo equivalente; escribir la carga como el paralelo de una impedancia puramente imaginaria y otra puramente real.
- iv) Realizar un diagrama fasorial en el que se representen los fasores asociados a las fuentes, las corrientes de línea y las corrientes de fase (corrientes por las cargas).
- v) Hallar la expresión temporal de las corrientes por las cargas.
- vi) Compensar el factor de potencia, indicando qué componentes colocaría y cómo las conectaría para que su magnitud sea lo más chica posible.

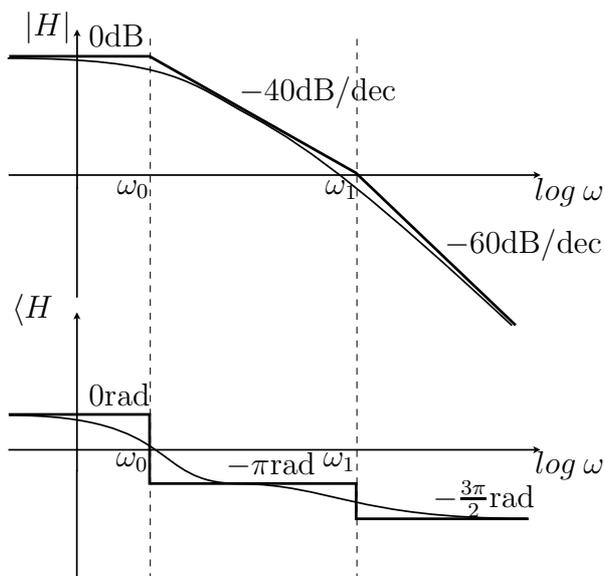


Figura 3: Respuesta en régimen del sistema.

Problema 4 (11 puntos)

Considere un sistema S lineal, causal e invariante en el tiempo, tal que desde el punto de vista entrada-salida posee una respuesta en frecuencia **asintótica** como la de la figura 3.

- a. Indicar para cada una de las siguientes transferencias, si se comporta o no como la respuesta en frecuencia del sistema S . Justificar.

$$\text{i) } H(j\omega) = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_1}(\omega_1 + j\omega)}{((j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2)} \quad 0 < \zeta^2 < 1$$

$$\text{ii) } H(j\omega) = \frac{\omega_0^2\omega_1}{[j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2] (\omega_1 - j\omega)} \quad 0 < \zeta^2 < 1$$

$$\text{iii) } H(j\omega) = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_1}(\omega_1 + j\omega)}{(\omega_0 + j\omega)^2}$$

$$\text{iv) } H(j\omega) = \frac{\omega_0^2\omega_1}{(\omega_0 + j\omega)^2(\omega_1 + j\omega)}$$

- b. Diseñe un sistema de la forma $K(j\omega)H(j\omega)$ que cumpla que:

- la transferencia $K(j\omega)$ es de primer orden.
- elimina las bajas frecuencias.
- la respuesta en frecuencia es **idéntica** a $H(j\omega)$ para frecuencias **superiores o iguales** a ω_0 .

Sugerencia: dibujar el Diagrama de Bode asintótico de la transferencia $K(j\omega)$ deseada.

Solución

Problema 1

a) La energía de una señal g se define como sigue

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$$

La identidad de Parseval establece que la energía se puede calcular también a partir del espectro de la señal:

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[g(t)](f)|^2 df$$

Para el caso de $g(t) = \text{sinc}(f_0 t)$, se cumple que

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{f_0} \cdot p_{f_0}(f) \right|^2 df = \frac{1}{f_0^2} \cdot f_0 = \frac{1}{f_0}$$

Entonces el *sinc* es de energía finita.

b) La respuesta del sistema lineal se vincula con la entrada a través de una relación de convolución

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

siendo h la respuesta al impulso del sistema. Desde el punto de vista espectral, considerando que la Transformada de Fourier del producto convolución es el producto ordinario de las Transformadas (cuando ambos productos están bien definidos), tenemos que

$$R(f) = \mathcal{F}[r(t)](f) = \mathcal{F}[e(t) * h(t)] = \mathcal{F}[e(t)] \cdot \mathcal{F}[h(t)] = E(f) \cdot H(f)$$

i) Como la respuesta en frecuencia del sistema es del tipo pasabajos ideal, de frecuencia de corte f_C , entonces

$$H(f) = p_{2f_C}(f)$$

Por otro lado,

$$E(f) = \frac{1}{f_0} \cdot p_{f_0}(f)$$

Entonces

$$R(f) = \frac{1}{f_0} p_{f_0}(f) \cdot p_{2f_C}(f) = \frac{1}{f_0} \cdot p_{\min\{f_0, 2f_C\}}(f)$$

Calculemos la energía de la respuesta:

$$E(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} |R(f)|^2 df = \frac{1}{f_0^2} \cdot \min\{f_0, 2f_C\} \leq \frac{1}{f_0^2} \cdot f_0 = E(e)$$

ii) Para que $E(r) = \frac{1}{3} \cdot E(e) = \frac{1}{3f_0}$, debe ser $2f_C < f_0$:

$$E(r) = \frac{1}{3f_0} = \frac{1}{f_0^2} \cdot 2f_C \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{f_0} \cdot 2f_C \Rightarrow f_C = \frac{f_0}{6}$$

Problema 2

a) Primero hallamos la relación entre los fasores V_{in} y V_g . Para ello planteamos el nudo correspondiente a V_g :

$$\frac{V_{in} - V_g}{Lj\omega} = \frac{V_g}{R} + \frac{V_g - \alpha V_g}{1/Cj\omega}$$

De donde

$$\frac{V_{in}}{Lj\omega} = V_g \cdot \left[\frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R} + (1 - \alpha)Cj\omega \right] = V_g \cdot \left[\frac{R + Lj\omega + (1 - \alpha)RLC(j\omega)^2}{RLj\omega} \right]$$

Despejando, obtenemos la primera relación buscada:

$$V_g = V_i \cdot \left[\frac{R}{R + Lj\omega + (1 - \alpha)RLC(j\omega)^2} \right]$$

Ahora relacionemos la tensión V_g con V_{out} a través de la fuente dependiente y las tensiones del transformador ideal. Denotando por V_P y V_S a las tensiones del primario y secundario respectivamente, tenemos que:

$$\frac{V_P}{N_P} = \frac{V_S}{N_S} \Rightarrow V_P = \frac{N_P}{N_S} \cdot V_S$$

Además: $V_S = \alpha V_g$ y $V_{out} = V_P + V_S$. De aquí resulta:

$$V_{out} = V_P + V_S = \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right) \cdot V_S = \alpha \cdot \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right) \cdot V_g = \alpha \cdot \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right) \cdot \left[\frac{R}{R + Lj\omega + (1 - \alpha)RLC(j\omega)^2} \right] \cdot V_{in}$$

Entonces, la transferencia en régimen sinusoidal es

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V : in} = \alpha \cdot \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right) \cdot V_g = \alpha \cdot \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right) \cdot \left[\frac{R}{R + Lj\omega + (1 - \alpha)RLC(j\omega)^2} \right]$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha \cdot \left(1 + \frac{N_P}{N_S}\right)}{(1 - \alpha)LC \left[\frac{1}{(1 - \alpha)LC} + \frac{1}{(1 - \alpha)RC}j\omega + (j\omega)^2 \right]}$$

b) Sustituyendo en la expresión anterior los valores dados: $\frac{N_P}{N_S} = \frac{1}{3}$, $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ y $\alpha = -3$, obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{-3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + 3\right) \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{(1+3)\frac{1}{\omega_0^2}} + \frac{1}{(1+3)RC}j\omega + (j\omega)^2 \right]} = \frac{-\omega_0^2}{\left[\frac{\omega_0^2}{4} + \frac{1}{4RC}j\omega + (j\omega)^2 \right]}$$

Para obtener la expresión deseada, se debe cumplir que $5\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{L}{R} = \omega_0^2 \cdot \frac{L}{R}$. Entonces

$$\frac{L}{R} = \frac{5}{\omega_0}$$

c) Observemos que:

$$H(j\omega) = \frac{-\omega_0^2}{\left[\frac{\omega_0^2}{4} + \frac{5}{4}\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2 \right]} = \frac{-\omega_0^2}{(j\omega + \frac{\omega_0}{4})(j\omega + \omega_0)}$$

Para deducir los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, realizamos un análisis por bandas, distinguiendo tres casos:

- $w \ll \frac{\omega_0}{4}: \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{-\omega_0^2}{\left(\frac{\omega_0}{4}\right)(\omega_0)} = -4 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20 \log(4)dB \\ \arg(H(j\omega)) \approx \pm\pi \end{cases}$$

- $\frac{\omega_0}{4} \ll \omega \ll \omega_0: \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{-\omega_0^2}{(j\omega)(\omega_0)} = \frac{j\omega_0}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20 \log(\omega_0)dB - 20 \log(\omega)dB \\ \arg(H(j\omega)) \approx +\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- $w \gg \omega_0: \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{-\omega_0^2}{(j\omega)(j\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20 \log(\omega_0^2)dB - 40 \log(\omega)dB \\ \arg(H(j\omega)) \approx 0 \quad (\pm 2\pi) \end{cases}$$

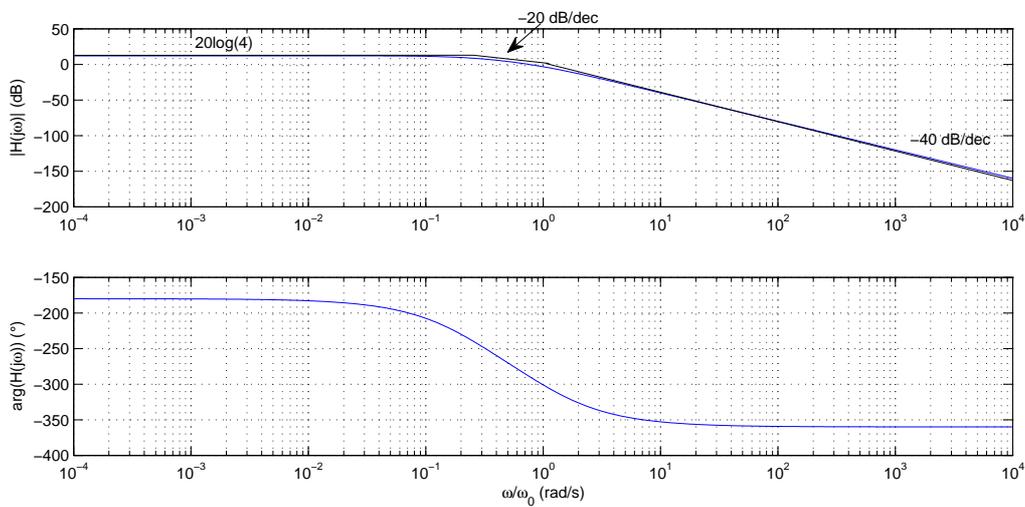


Figura 4:

Los Diagramas de Bode se muestran en la figura 4. Tengamos en cuenta que la aproximación asintótica es buena sólo para frecuencias muy bajas o muy altas, en tant en la banda intermedia $[\frac{\omega_0}{4}, \omega_0]$ la aproximación será muy mala, ya que ambas frecuencias están muy cerca.

d) Para una entrada sinusoidal pura

$$v_{in}(t) = A \cdot \cos(\omega_C t + \Phi)$$

la respectiva salida en régimen vale

$$v_{out}(t) = A \cdot |H(j\omega_C)| \cdot \cos[\omega_C t + \Phi + \arg(H(j\omega_C))]$$

Lo mismo sucede para una entrada dada por un *seno* en lugar de un *coseno*. Entonces, sabemos que la respuesta en régimen que corresponde a la entrada indicada es:

$$v_{out}(t) = |H(j\omega_0)| \left[V_p \sqrt{2} \cos[\omega_0 t + \pi/2 + \arg(H(j\omega_0))] + V_p \sqrt{2} \sen[\omega_0 t - \pi/2 + \arg(H(j\omega_0))] \right]$$

como

$$H(j\omega_0) = \frac{-\omega_0^2}{(j\omega_0)^2 + \frac{5}{4}\omega_0(j\omega_0) + \frac{\omega_0^2}{4}} = \frac{-\omega_0^2}{(\frac{1}{4} - 1)\omega_0^2 + j\frac{5}{4}\omega_0^2} = \frac{4}{3 - j5}$$

De donde

$$|H(j\omega_0)| \approx 0,7 \approx -3,3dB \quad , \quad \arg(H(j\omega_0)) \approx 1,03 \text{ rad} \approx 59^\circ$$

y

$$v_{out}(t) = 0.7 \cdot \left[V_p \sqrt{2} \cos [\omega_0 t + \pi/2 + 1,03] + V_p \sqrt{2} \text{sen} [\omega_0 t - \pi/2 + 1,03] \right]$$

Problema 3

- a. La potencia aparente consumida en cada carga es $S = \frac{V_{eff}^2}{Z}$, la potencia aparente total es $S_T = 3 \frac{V_{eff}^2}{Z}$

$$S_T = 3V_{eff}^2 \frac{R + jX}{R^2 + X^2}$$

$$Q_T = 3V_{eff}^2 \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$P_T = 3V_{eff}^2 \frac{R}{R^2 + X^2}$$

- b. i) Como la carga no tiene neutro podemos utilizar el teorema de Blondell, por lo cual la potencia total consumida por el sistema de cargas es la suma de P_1 y P_2
 $P_{tot} = 1650 W$.

El teorema de Blondell también vale para las potencias reactiva y aparente, primero hallamos la potencia reactiva medida por unos hipotéticos medidores de potencia aparente y reactiva ubicados en las mismas posiciones que W_1 y W_2 .

Utilizamos lo siguiente

$$S = V \times \bar{I} = P + jQ, \Rightarrow |S| = |V||I|$$

$$S_1 = V_1 \times I_1$$

$$S_2 = -V_3 \times I_2$$

$$|S_1| = |V_1| * |I_1| = 1100VA$$

$$|S_2| = |V_3| * |I_2| = 1100VA$$

Además $S^2 = P^2 + Q^2$, entonces $Q = \sqrt{|S|^2 - P^2}$

$$Q_1 = \sqrt{|S_1|^2 - P_1^2} = 0 VAR$$

$$Q_2 = \sqrt{|S_2|^2 - P_2^2} = \sqrt{1100^2 - 550^2} VAR = 550\sqrt{3} VAR$$

Sabemos que Q total debe ser positiva porque las cargas son todas inductivas.

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 = 550\sqrt{3}VAR$$

$$S = P + jQ = 1650 + j550\sqrt{3}VA = 1905VA\angle 30^\circ$$

- ii) El argumento entre los fasores de las corrientes I_1 e I_2 y de los voltajes de las fuentes v_1 y v_3 se puede sacar del factor de potencia:

$$P_1 = |V_1||I_1| \cos(\varphi_1), \text{ entonces } \varphi_1 = \arccos\left(\frac{P_1}{|S_1|}\right) = \arccos 1 = 0^\circ$$

$$P_2 = |V_3||I_2| \cos(\varphi_2), \text{ entonces } \varphi_2 = \arccos\left(\frac{P_2}{|S_2|}\right) = \arccos\left(\frac{550}{1100}\right) = 60^\circ$$

Donde φ_2 es el argumento entre $-V_3$ e I_2 , el negativo en V_3 es porque la polaridad de la fuente es la contraria a la que mide el vatímetro.

Además por ley de corrientes de Kirchoff planteada en el sistema de cargas $I_3 = -I_1 - I_2$

$$I_1 = 5A\angle 0^\circ$$

$$I_2 = 5A\angle(\arg(-V_3) - 60^\circ) = 5A\angle -120^\circ$$

$$I_3 = 5A\angle -240^\circ$$

- iii) Como todas las cargas son iguales cada una consume la tercera parte de la potencia activa y reactiva totales. La componente real consume la potencia activa y la imaginaria la reactiva.

Consideramos la carga en paralelo como $Z = R||jX$, R y X no son las de la parte a sino las que vamos a calcular ahora.

$$P_R = \frac{V_{eff}^2}{R} = \frac{P_{tot}}{3}, \quad \Rightarrow R = 3 \frac{V_{eff}^2}{P_{tot}} = 3 * \frac{220^2}{1650} \Omega = 88\Omega$$

$$Q_X = \frac{V_{eff}^2}{X} = \frac{P_{tot}}{3}, \quad \Rightarrow X = 3 \frac{V_{eff}^2}{Q_{tot}} = 3 * \frac{220^2}{550\sqrt{3}} = 152\Omega$$

El voltaje eficaz en cada carga es el de las fuentes dado que están en triángulo, es decir los voltajes compuestos son los voltajes en las cargas y a su vez los voltajes entregados por las fuentes, dado que éstas también están en triángulo, como en el dibujo de la parte a.

- iv) Como se vio en la parte anterior, las corrientes de línea quedan colineales con las fuentes, el resultado se muestra en la figura 5

Las corrientes de fase, como se definen en la figura 6, cumplen la relación de la ecuación 0.1.

$$|I_{Zi}| = \frac{V_{eff}}{|Z|} = 220V \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}} = 2.89A = \frac{5A}{\sqrt{3}} \quad (0.1)$$

Las corrientes de fase estarán retrasadas 30° respecto a sus respectivas fuentes, esto queda claro pues el argumento de S es el mismo que el de Z . Con estos datos agregamos los fasores al diagrama de la figura 5

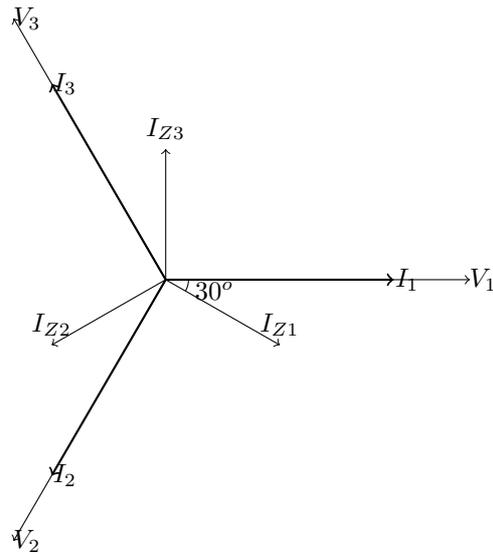


Figura 5: Diagrama fasorial de la parte iv

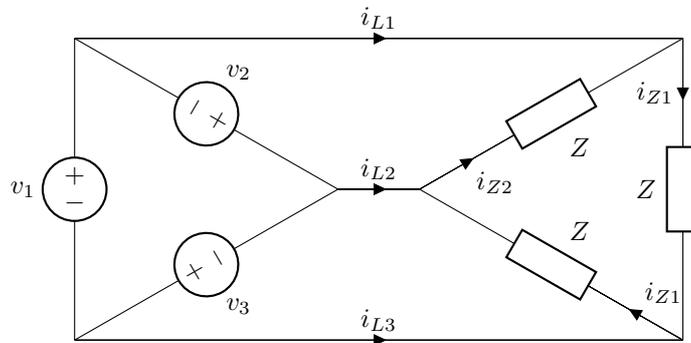


Figura 6: Modelo del Ejercicio 3, con la definición de corrientes de la solución

- v) Las corrientes por las cargas tienen una amplitud de $|I_{Zi}|\sqrt{2}$ y los desfases salen de los argumentos de los fasores.

$$i_{Z1}(t) = 4.08A \cos(\omega t - 30^\circ)$$

$$i_{Z2}(t) = 4.08A \cos(\omega t - 150^\circ)$$

$$i_{Z1}(t) = 4.08A \cos(\omega t - 270^\circ)$$

- vi) Cada condensador tiene que entregar la tercera parte de la reactiva consumida. La reactiva entregada por un condensador está dada por la fórmula $Q_C = |V_C|^2 C \omega$, siendo V_C el fasor en valor eficaz del voltaje en bornes del condensador; nótese que lo expresamos en positivo porque hablamos de "reactiva entregada"

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_C^2}$$

Dado que la reactiva que queremos entregar es fija, para que C sea del valor más chico posible, necesitamos que $|V_C|$ sea lo más grande posible. Esto significa que nos conviene poner los condensadores en triángulo.

$$C = \frac{550V AR\sqrt{3}/3}{314rad/s (220V)^2} = 21\mu F$$

Problema 4

- a. A partir del diagrama de Bode del Módulo es posible inferir que entorno a ω_0 existe una raíz del denominador de la tranferencia de multiplicidad **2** ó se poseen dos raíces complejas conjugadas de módulo ω_0 , ya que se produce una caída de 40dB/dec. Del mismo modo es posible determinar que entorno a ω_1 se encuentra otra raíz del denominador pero con multiplicidad **1**, ya que se agrega un incremento en la caída de 20dB/dec.

Debido a esto es posible descartar las tranferencias **i** e **iii**.

Las otras dos tranferencias difieren únicamente en la evolución de la fase respecto a la frecuencia. Por un lado, una tranferencia de la forma $(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2$ con $0 < \zeta^2 < 1$ introduce un defasaje nulo para muy bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_0$) y un defasaje de π radiantes para muy altas frecuencias ($\omega \gg \omega_0$), produciendo así un adelanto de fase. A partir de ésta es posible determinar que la tranferencia $\frac{1}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$ (inversa) produce un retraso de fase de π radiantes.

Razonando en forma análoga es posible determinar que las tranferencias $\omega_1 + j\omega$ y $\frac{1}{\omega_1 - j\omega}$ provocan un adelanto de fase de $\frac{\pi}{2}$ radiantes entorno a las frecuencia ω_1 mientras que $(\omega_1 - j\omega)$ y $\frac{1}{\omega_1 + j\omega}$ provocan un retraso de fase de la misma magnitud.

A partir de esto es posible descartar la tranferencia **ii**. La tranferencia **iv** representa exactamente a la respuesta en frecuencia del sistema S y por lo tanto la respuesta es la opción **iv**).

- b. La tranferencia $H(j\omega)$ introduce ganancia unitaria para las bajas frecuencias y atenúa las altas. Se trata de algún tipo de filtro pasabajos. Diseñando un sistema con tranferencia $(j\omega)H(j\omega)$ es posible atenuar las bajas frecuencias a una tasa de -20 dB por cada década "hacia atrás". Sin embargo, el efecto del factor $(j\omega)$ se propaga por todo el espectro, enfatizando cada vez más las altas frecuencias y produciendo un incremento de $\frac{\pi}{2}$ radiantes para todo el espectro. Agregando un factor de la forma $\frac{1}{(j\omega + \omega^*)}$ es posible compensar tanto la ganancia como el defasaje introducido por el factor $(j\omega)$ para las altas frecuencias. Por lo tanto la tranferencia puede ser de la forma $H^*(j\omega) = K(j\omega)H(j\omega)$, con $K(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega^*}$. En la figura 7 se observa la tranferencia $K(j\omega)$.

Para cumplir con las condiciones deseadas, es necesario no alterar la respuesta en frecuencia desde ω_0 en adelante, por lo que es necesario que $\omega^* \ll \omega_0$. En la figura 8 puede observarse el diagrama de Bode para este último caso.

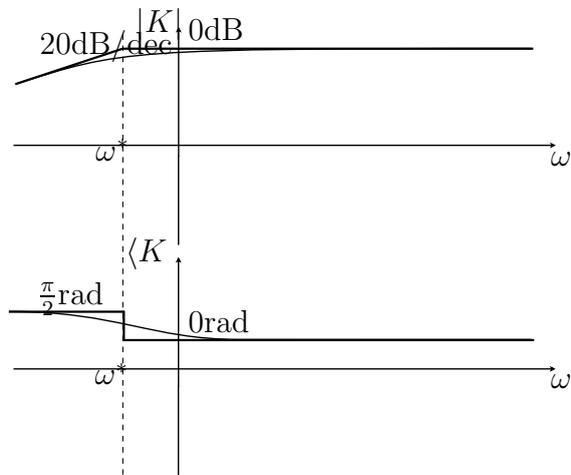


Figura 7:

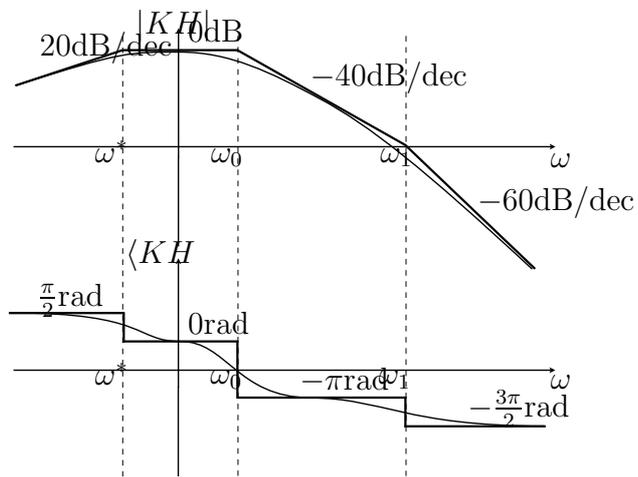


Figura 8: