Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2011

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (13 puntos)

Denotaremos por $p_{x_0}(x)$ el pulso de ancho $x_0 > 0$, centrado en 0, de altura 1.

a) Hallar la Transformada de Fourier (TdF) del pulso $p_T(t)$.

b) Mostrar que la TdF de $g(t) = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}$ es el pulso $p_{f_0}(f)$

c) Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \pi$$

d) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$$

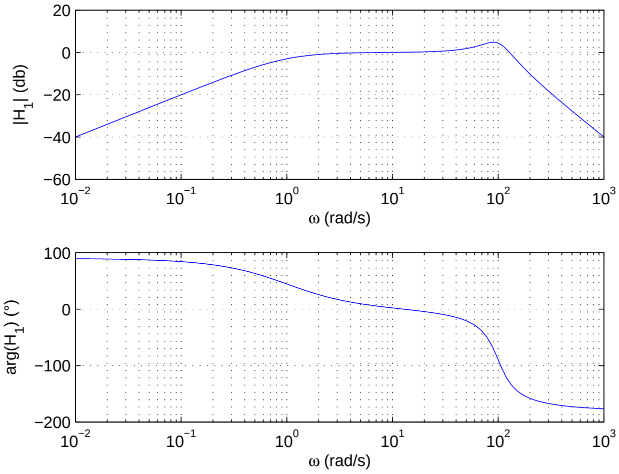
e) Si se cumple que $f_1 \gg f_0$, calcular la energía de la señal

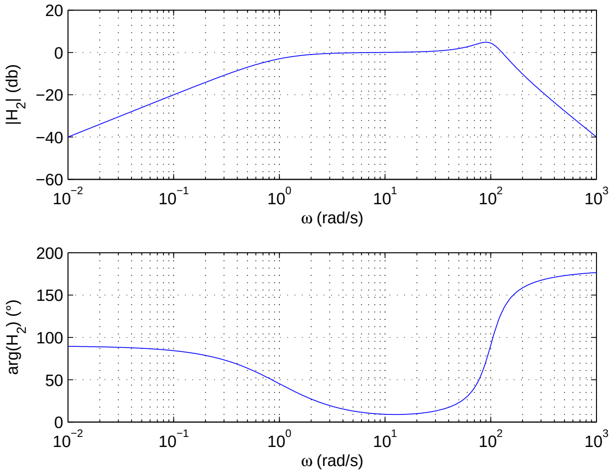
$$g(t) = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t} . \cos(2\pi f_1 t)$$

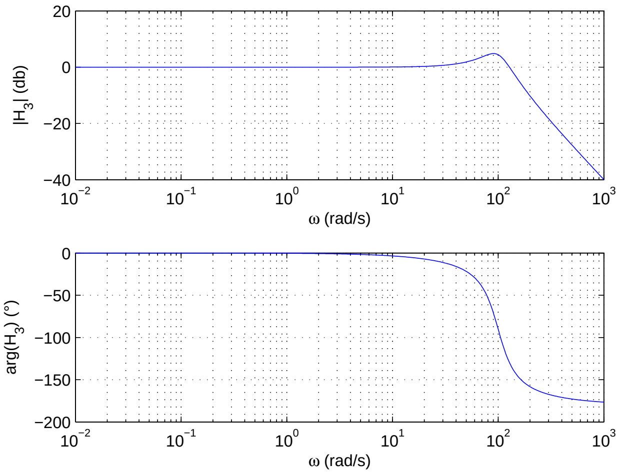
Problema 2 (9 puntos)

Se tiene un sistema lineal de cuya respuesta en régimen se conoce lo siguiente:

- Existe una pulsación ω_1 tal que ante la entrada $e_1(t) = A.\cos(\omega_1 t)$ responde con una señal $r_1(t)$ de amplitud $\frac{A}{10}$.
- Existe una pulsación ω_2, mucho mayor que ω_1, tal que ante la entrada $e_2(t) = A.\cos(\omega_2 t + 120^o)$ responde con la señal $r_2(t) = A' \cos(\omega_2 t + 75^o)$.







a) **Para cada uno** de los Diagramas de Bode mostrados en la figura, indicar, justificando, si corresponde o no al sistema descrito.

b) Para la o las respuestas afirmativas de la parte anterior, hallar aproximadamente la señal $r_1(t)$. Justificar.

Problema 3 (21 puntos)

a) En una planta industrial, interesa alimentar una carga trifásica que se muestra en la Figura 1, de la cual se dispone únicamente de sus tres bornes accesibles. La frecuencia de trabajo es 50 Hz y se mantiene a lo largo del ejercicio. Para obtener un modelo eléctrico de la misma, se decide realizarle un ensayo alimentándola con un sistema trifásico de fuentes en triángulo de valor eficaz $380V$, midiéndose la potencia activa y reactiva que consume.

I. Suponiendo que la carga se encuentra en las hipótesis del teorema de Blondell y que se dispone de dos vatímetros, indique mediante un esquema un posible conexionado de los mismos para medir la potencia activa en el ensayo. Justifique claramente los fundamentos de su método de medida.

II. Hallar un modelo para la carga, como tres impedancias idénticas Z en estrella, sabiendo que del ensayo se obtuvo $P = 7504W$ y $Q = 4332VAR$.

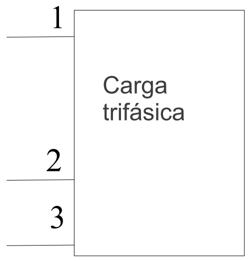


Figura 1: Carga

(***Nota:*** *Se recuerda la definición de potencia aparente* $S = \sum_{j=1}^{3} V_j \bar{I}_j$ *donde* V_j *y* I_j *son las respectivas tensiones y corrientes de fase.*)

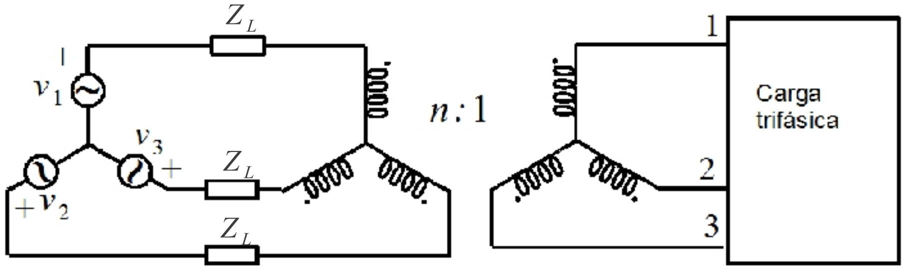


Figura 2:

b) La misma carga se alimenta mediante la instalación de la Figura 2, donde el sistema de fuentes es perfecto. Mostrar que es equivalente al circuito trifásico da la Figura 3, para Z_{eq} que se hallará en función de n (relación de transformación de los *transformadores ideales*) y Z. **Justificar.**

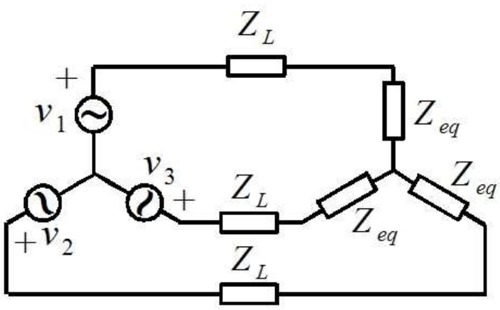


Figura 3:

c) Trabajando con el equivalente de la Figura 3 donde:
$v_1(t) = \sqrt{2}\,7.2kV \sin(100\pi t)$, $v_2(t) = \sqrt{2}\,7.2kV \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, $v_3(t) = \sqrt{2}\,7.2kV \sin\left(100\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$

$n = \frac{7200}{220}$, $Z_L = R + Lj\omega$, $R = 100\Omega$, $L = 20Hy$

I. Hallar los fasores I_1, I_2, I_3 correspondientes a las corrientes de línea. Representarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores V_1, V_2 V_3 del sistema de fuentes.

II. Obtener las expresiones temporales, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

III. Calcular las potencias activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes.

d) Compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, sin modificar la potencia activa que entregan. Para ello indicar qué componentes colocaría, sus valores y cómo los conectaría.

Problema 4 (17 puntos)

Sea el circuito de la figura 4.

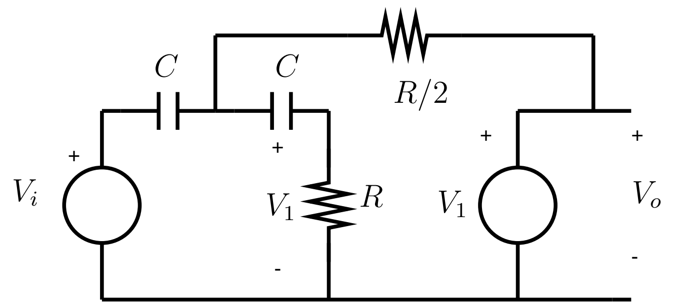


Figura 4: Circuito del problema

a) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Escribir el resultado en función de $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

b) Deducir y dibujar los correspondientes Diagramas de Bode asintóticos de amplitud y fase.

c) Verificar que el circuito implementa un filtro pasa altos de orden 2 y hallar la frecuencia ω_C de corte (frecuencia a la cual atenúa 3 db).

d) Calcular la atenuación que introduce el sistema a las siguientes frecuencias:

$$10\omega_0 \ , \ \omega_0 \ , \ \sqrt{2}\omega_0 \ , \ \frac{\omega_0}{10}$$

e) Hallar la salida en régimen para $v_i(t) = A \sin\left(\omega_C t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ donde ω_C es la hallada en la parte . Especificar la relación entre las amplitudes y las fases de la entrada y la salida.

Solución

Problema 1

Parte a)
Aplicando directamente la definición, obtenemos por integración directa que

$$\mathcal{F}[p_T(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}dt = \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

Parte b)
Como la TdF conjugada es la inversa de la TdF, sabemos que

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[p_T(t)]](t) = \mathcal{F}[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}](t) = \bar{\mathcal{F}}[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}](-t) = p_T(-t) = p_T(t)$$

donde la última igualdad viene de la paridad del pulso. Renombrando las variables y cambiando el parámetro T por f_0, se llega al resultado.

Parte c)
Usando la inversión de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}e^{+j2\pi f0}df = \left.\bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[p_T]]\right|_{t=0} = 1$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $u = \pi Tf$ $(du = \pi T df)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\pi\frac{u}{\pi T}}\frac{du}{\pi T} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$$

Parte d)
La TdF del pulso, elevada al cuadrado, será la TdF de la convolución en el tiempo del pulso consigo mismo, que da un triángulo de altura T, que va desde $-T$ a T. Razonando igual que en la parte anterior,

$$T = \bar{\mathcal{F}}\left[\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2}\right]\Bigg|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi Tf)}{\pi^2 f^2}df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{\pi^2\frac{u^2}{\pi^2T^2}}\frac{du}{\pi T} = \frac{T}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du = \pi$$

Otra forma de calcular la integral es observar que la misma está relacionada, via el Teorema de Parseval, con la energía del pulso, que vale T.

Parte e)
Por el Teorema de Parseval, la energía de la señal $g(t)$, definida como $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2dt$ se puede calcular también en la frecuencia como $\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{F}[g]|^2(f)df$.
Para calcular la energía de la señal, hay que observar que la misma consiste en un sinc modulado por un coseno (recordar la modulación AM). Entonces, en frecuencia, se verá el espectro del sinc, es decir, un pulso, centrado en las frecuencias $\pm f_1$. De aquí en más el cálculo de la energía es sencillo. Queda a cargo del alumno hacer las cuentas precisas.

Problema 2

La respuesta en régimen del sistema ante una entrada sinusoidal $e(t) = A\cos(\omega_0 t)$ será

$$r(t) = A.|H(j\omega_0|.\cos\left(\omega_0 t + arg(H(j\omega_0)\right))$$

Parte a)
El primer dato indica que hay una frecuencia de trabajo a la cual el sistema introduce una atenuación de 10, es decir, una ganancia de $-20db$. Los tres sistemas cumplen con esta condición. Los dos primeros sistemas tienen dos frecuencias a la que esto ocurre (cercanas a $0.1rad/s$ y $300rad/s$), en tanto el tercero cumple con este requisito a una frecuencia cercana a los $300rad/s$.

El segundo dato implica que el sistema debe introducir un retardo de 45^o. Sólo los sistemas 1 y 3 cumplen con esto, pues el segundo sistema sólo introduce adelantos de fase entre 0^o y 180^o. Los sistemas 1 y 3 introducen el retardo deseado a una frecuencia cercana a los $50rad/s$. La hipótesis sobre la relación entre ω_1 y ω_2 nos permite concluir que la transferencia H_1 es la única que corresponde al sistema descrito.

Parte b)
De la parte anterior, resulta que $\omega_1 \approx 0.1rad/s$. A esa frecuencia, el sistema introduce un adelanto cercano a 90^o, por lo que la respectiva salida en régimen es

$$r_1(t) \approx \frac{A}{10}.\cos(0.1t + 90^o) = -\frac{A}{10}.\sin(0.1t)$$

Problema 3

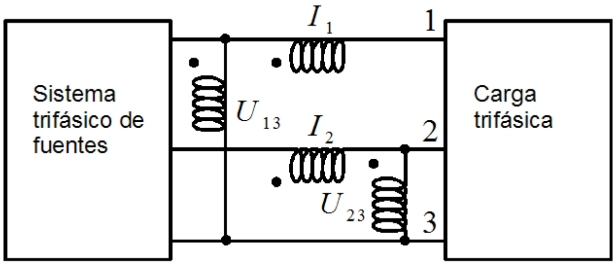


Figura 5: Esquema de conexión de los vatímetros

a) I. Para medir la potencia consumida por la carga, podemos utilizar el teorema de Blondell. Sabemos que las cargas verifican las hipótesis del teorema[1], por lo tanto $P = \sum_{j=1}^{3} Re\left[U_{jx}\bar{I}_j\right]$ donde U_{jx} es la tensión entre la línea j y un punto de referencia cualquiera x y $\bar{I}_j$ es la corriente en la línea j. Eligiendo x convenientemente, en una de las líneas, por ejemplo $x = 3$, simplificamos el calculo anterior, pues uno de los términos se anula trivialmente. Finalmente tenemos:

$$P = Re[U_{13}\,\bar{I}_1] + Re[U_{23}\,\bar{I}_2] \tag{0.1}$$

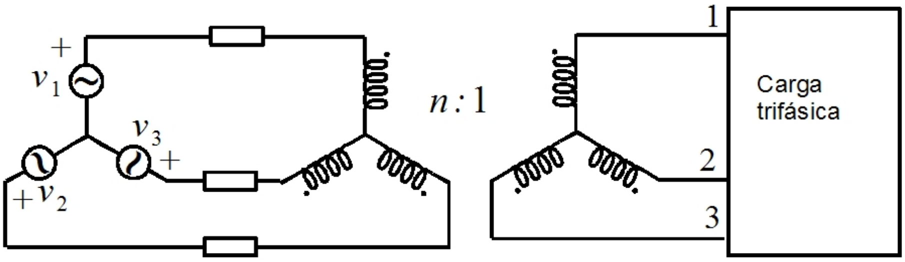
Podemos medir las cantidades anteriores, con tan solo dos vatímetros, conectados como se muestra en la figura 5.

II. Buscamos un modelo para las cargas, formado por tres impedancias idénticas Z en estrella, que consuman $P = 7504W$ y $Q = 4332Var$.

[1] la condición necesaria para aplicar el teorema de Blondell, es que si las cargas están en estrella, no exista conexión de neutro entre las cargas y las fuentes.

$$Z = |Z| \angle\varphi \text{ Donde } \begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{Q}{P} \;\Rightarrow\; \varphi = 30 \\ \\ |S| = \sqrt{P^2+Q^2} \text{ Recordemos que } |S| = 3\,|V_{eff}|\,|I_{eff}| = 3\frac{|V|^2}{|Z|} \\ \Rightarrow |Z| = \frac{3\left|\frac{380}{\sqrt{3}}\right|^2}{\sqrt{P^2+Q^2}} \;\Rightarrow |Z| = 16.7\Omega \end{cases}$$

$$\boxed{Z = 16.7\Omega\angle 30}$$



b) En primer lugar, sustituimos en el circuito de la figura , las cargas trifásicas por sus modelo equivalente calculado en la parte anterior. Luego, observamos el equivalente monofásico, como se ilustra en la figura 6, donde calculando la impedancia vista Z_v obtenemos$Z_v = n^2\,Z$. Finalmente el circuito trifásico

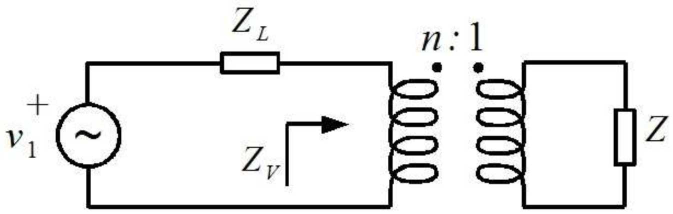


Figura 6: Equivalente monofásico

equivalente se muestra en la figura 7, donde $Z_{eq} = n^2 Z$

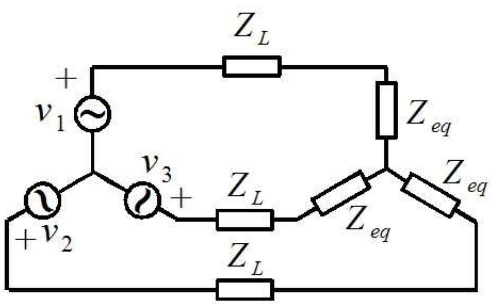


Figura 7: Circuito equivalente

c) I. Trabajando con el circuito equivalente, tenemos:

$$I_i = \frac{V_i}{Z_L + Z_{eq}} \quad \text{para } i = 1,2,3 \text{ con } V_1 = 7.2kV\angle 0\,, V_2 = 7.2kV\angle 120\,, V_3 = 7.2kv\angle 240 \qquad (0.2)$$

Luego sustituyendo los parámetros por sus valores dados en la letra, obtenemos:

$$I_1 = 331mA\angle -44 \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{c} I_1 = 331mA\angle -44 \\ I_2 = 331mA\angle -44+120 \\ I_3 = 331mA\angle -44+240 \end{array}} \tag{0.3}$$

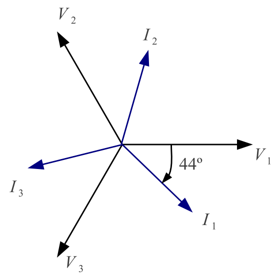


Figura 8: Diagrama fasorial

II. Evaluando las expresiones de la parte anterior, tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{c} i_1(t) = \sqrt{2}\,331mAsen(\omega t - 0.77) \\ i_2(t) = \sqrt{2}\,331mAsen\left(\omega t - 0.77 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) = \sqrt{2}\,331mAsen\left(\omega t - 0.77 + \frac{4\pi}{3}\right) \end{array}} \tag{0.4}$$

III. De las partes anteriores, tenemos los fasores de tensión y corriente. Calculamos la potencia activa y reactiva consumidas a las fuentes como:

$$P = 3Re[V\bar{I}] \;\Rightarrow\; \boxed{P = 5142W}$$

$$Q = 3Im[V\bar{I}] \;\Rightarrow\; \boxed{Q = 4966Var}$$

d) Para compensar la potencia reactiva, sin afectar la potencia activa consumida a las fuentes, colocamos un banco de condensadores, en estrella y en paralelo con las fuentes de tensión. Calculamos el valor de los condensadores, de modo que la potencia reactiva total sea nula.

$$Q + Q_C = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{Q}{3\omega\,|V|^2} \;\Rightarrow\; \boxed{C = 0.101\mu F}$$

El esquema de conexión se muestra en la figura 9.

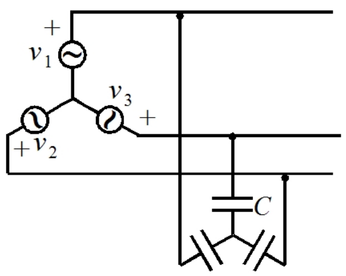


Figura 9: Conexión de los condensadores