

Sistemas Lineales 1

Segundo Parcial, 2010

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

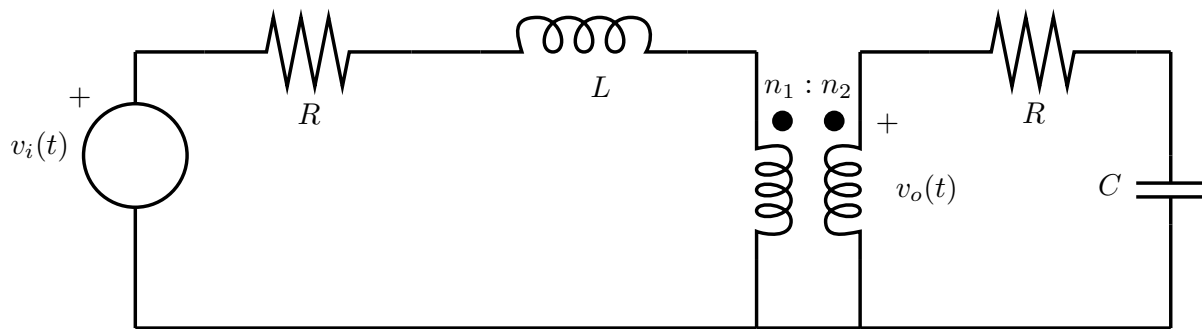


Figura 1: Circuito del Problema 1.

Problema 1 (28 puntos)

Se considera el circuito de la figura 1

- Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, siendo $v_o(t)$ la tensión en bornes del secundario del transformador ideal.
- Verificar que para $n = \frac{n_1}{n_2} = 2$ y $RC = \frac{1}{25} \frac{L}{R}$, definiendo convenientemente una constante ω_0 , $H(j\omega)$ puede escribirse como

$$H(j\omega) = \frac{2\omega_0(j\omega + 25\omega_0)}{(j\omega)^2 + 5\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

- (c) Deducir y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$.
- (d) Hallar la distancia (en db) entre el Bode de módulo real y el asintótico para $\omega = 10\omega_0$ y $\omega = 25\omega_0$. Bosquejar el Diagrama de Bode de módulo real.
- (e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual la respuesta en régimen del sistema está retrasada exactamente 30° respecto de la entrada? **Justificar**.
- (f) Calcular la atenuación que introduce el sistema en las siguientes frecuencias: i) $\omega = 10\omega_0$; ii) $\omega = 30\omega_0$; iii) $\omega = 50\omega_0$.
- (g) i) Hallar la Serie de Fourier de una onda cuadrada simétrica de amplitud E , periodo $T = \frac{2\pi}{10\omega_0}$ y valor medio nulo, con ω_0 definida anteriormente.
- ii) Hallar en forma aproximada la respuesta en régimen del circuito de la figura 1 cuando la entrada es la onda cuadrada anterior. **Graficar esta respuesta y justificar** las aproximaciones realizadas.

Problema 2 (17 puntos)

- (a) Sean v y u funciones \mathcal{L}^1 . A partir de la definición de la Transformada de Fourier para funciones demostrar que $\mathcal{F}[v * u] = \mathcal{F}[v] \cdot \mathcal{F}[u]$
- (b) Demostrar,

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k t_0)\right] = f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0) \quad \text{donde } f_0 = \frac{1}{t_0}$$

- (c) Considere una función $x(t)$ de ancho de banda acotado, como se muestra en la figura 2(a). Definimos a la señal muestreada como $x_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - k t_s)$ con $t_s \in \mathcal{R}^+$ dado.

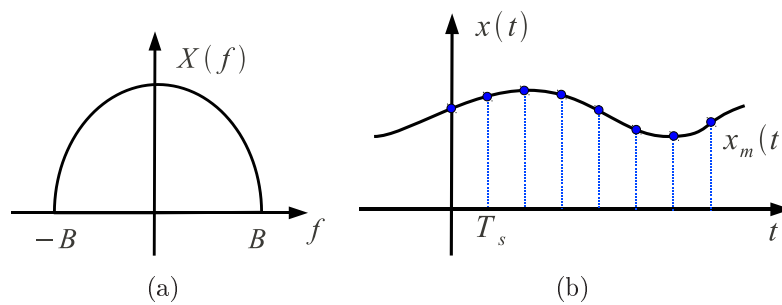
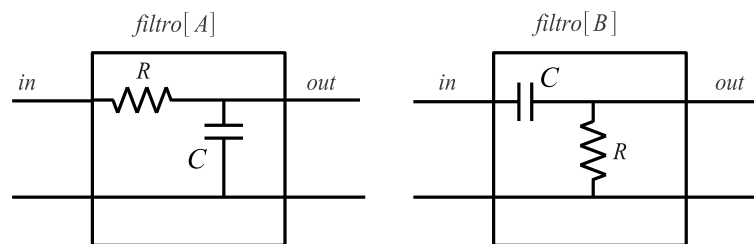


Figura 2:

1. Calcular el espectro de la señal muestreada a partir del espectro de la señal original.
 2. Realizar un bosquejo del espectro de x_m explicando los distintos casos que se pueden presentar en función de $f_s = \frac{1}{t_s}$
- (d) Se dispone de los circuitos mostrados en la figura . Se sabe que $f_s = 200 B$.



1. ¿Qué circuito le permitiría recuperar aproximadamente la señal original a partir de $x_m(t)$? [JUSTIFIQUE]
2. Utilizando el circuito que eligió, dimensione los parámetros para recuperar $x(t)$ a partir de $x_m(t)$.

Problema 3 (15 puntos)

- (a) Dado el triángulo de fuentes de corriente equilibrado y perfecto de la figura 3, hallar una estrella de fuentes de corriente equivalente.

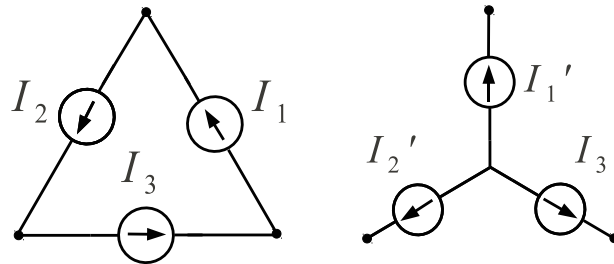


Figura 3:

Considere el circuito de la figura 4, donde $V_1 = 220V \angle 0^\circ$, $V_2 = 220V \angle 120^\circ$ y $V_3 = 220V \angle 240^\circ$. A su vez I_1, I_2 e I_3 un sistema de fuentes de corriente también equilibrado y perfecto. Por otro lado $Z = R + j\omega L = 50(1 + j)\Omega$ y se asume que trabajamos en régimen sinusoidal a frecuencia $f = 50Hz$.

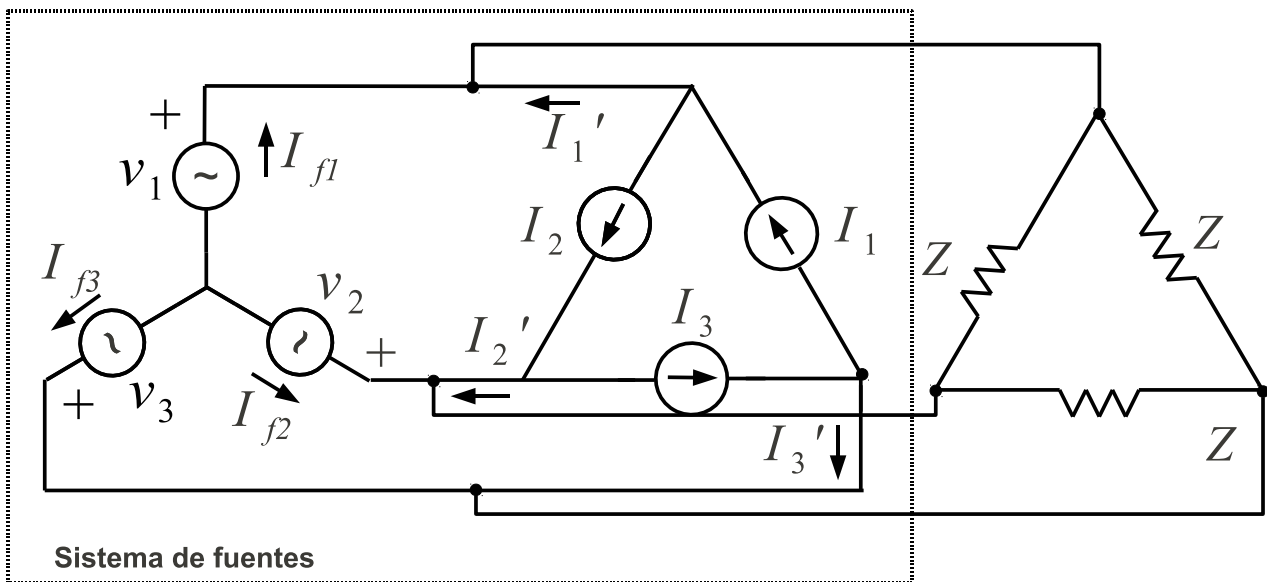


Figura 4:

- (b) Realizar el equivalente monofásico.
- (c) Determinar los fasores I_1, I_2 e I_3 de modo que se cumpla simultáneamente que, I_1', I_2' e I_3' estén **en fase** con las tensiones V_1, V_2 y V_3 respectivamente, **y además**, que los fasores I_{f1}, I_{f2} e I_{f3} , se encuentren **en cuadratura** con respecto a los fasores V_1, V_2 y V_3 respectivamente.
- (d) Determinar la potencia activa y reactiva entregada por las fuentes de tensión.
- (e) Compensar la potencia reactiva consumida por la carga al sistema de fuentes. Indique qué elementos colocaría, de qué valores y realice un esquema que ilustre la conexión.
- (f) Con el circuito compensado, repetir la parte (d).

Solución

Problema 1

1. Trabajamos con fasores. Las ecuaciones del transformador ideal nos imponen: $\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$, $n_1 I_1 = n_2 I_2$, donde consideramos corrientes y tensiones de primario y secundario, las primeras entrantes por los puntos y las segundas medidas desde los puntos. Además, $V_2(j\omega) = V_o(j\omega)$.

La malla del secundario nos da $-I_2 = \frac{V_o C j\omega}{RC j\omega + 1}$

La impedancia de carga del secundario pasa al primario multiplicada por la relación del transformación al cuadrado. Esto nos permite calcular la corriente del primario:

$$I_1(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{R + Lj\omega + n^2 \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}} = -\frac{I_2}{n} = \frac{V_o C j\omega}{n(RCj\omega + 1)}$$

Operando, llegamos a la expresión de la transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} = n \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{(j\omega + \frac{1}{RC})}{(j\omega^2) + (1 + n^2) \frac{R}{L} (j\omega) + \frac{n^2}{LC}}$$

2. Con $n = n_1/n_2 = 2$, $\omega_0 = \frac{R}{L}$, $RC = \frac{1}{25} \frac{L}{R} = \frac{1}{25\omega_0}$, tenemos que

$$\frac{n^2}{LC} = \frac{4}{LC} = 4 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{RC} = 4 \cdot \omega_0 \cdot 25 \cdot \omega_0 = 100\omega_0^2$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{2\omega_0(j\omega + 25\omega_0)}{(j\omega)^2 + 5\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2} = \frac{2\omega_0(j\omega + 25\omega_0)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $\omega_n = 10\omega_0$ y $\zeta = 1/4$.

3. Para deducir los Diagramas asintóticos de Bode, realizamos un análisis por bandas. Las frecuencias críticas son $\omega_n = 10\omega_0$ y $25\omega_0$.

$$\omega \ll 10\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{2\omega_0(25\omega_0)}{100\omega_0^2} = \frac{1}{2}$$

$$10\omega_0 \ll \omega \ll 25\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{2\omega_0(25\omega_0)}{(j\omega)^2}$$

$$25\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{2\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{2\omega_0}{(j\omega)}$$

Entonces vemos en la figura 5 que el Diagrama de Bode asintótico de módulo tiene una banda plana de baja frecuencia, donde introduce una atenuación de $20 \log 2 \text{ db}$. A partir de $10\omega_0$, comienza una caída a -40 db/dec , consecuencia del término de segundo orden en el denominador. Esta caída se modera a -20 db/dec a partir de $25\omega_0$. En lo que respecta a la fase, en baja frecuencia tenemos 0° , en tanto que en la segunda banda nos vamos hacia -180° y finalmente nos acercamos a -90° . Como las frecuencias críticas no están demasiado espaciadas, los Diagramas asintóticos no van a ser una buena representación de los Diagramas reales en la segunda banda.

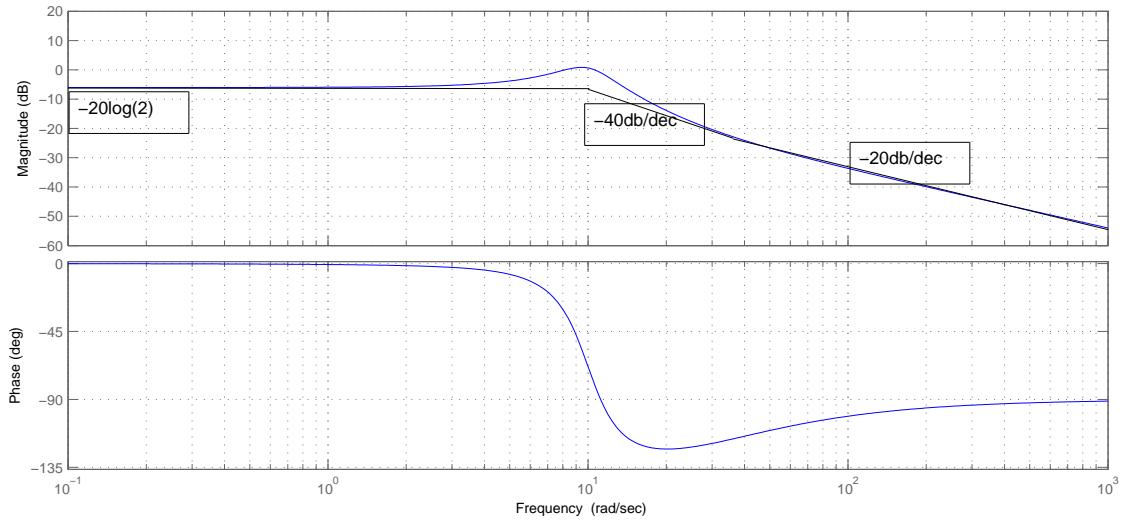


Figura 5: Diagramas de Bode reales del circuito del Problema 1 (eje normalizado a ω_0). Se muestran las aproximaciones asintóticas del módulo

$$4. \quad H_{re}(j10\omega_0) = \frac{2\omega_0(j10\omega_0+25\omega_0)}{(10j\omega_0)^2+5\omega_0(j10\omega_0)+100\omega_0^2} = \frac{2(j10+25)}{50j} = \frac{(j2+5)}{5j} = \frac{\sqrt{29}}{5} \angle(-68^\circ).$$

$$H_{as}(j10\omega_0) = \frac{1}{2}$$

Entonces

$$|H_{re}(j10\omega_0)|_{db} - |H_{as}(j10\omega_0)|_{db} = 20 \log \left| \frac{(j2+5)}{5j} \right| = 20 \log \left[\frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} \right] \approx 6,66db$$

$$H_{re}(j25\omega_0) = \frac{2\omega_0(j25\omega_0+25\omega_0)}{(25j\omega_0)^2+5\omega_0(j25\omega_0)+100\omega_0^2} = \frac{50(j+1)}{(100-25^2)+j125} = \frac{2,25(j+1)}{(4,25-25^2)+j5,25} = \frac{2(j+1)}{(4-25)+j5} \Rightarrow$$

$$H_{re}(j25\omega_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{125+21^2}} \angle(-121^\circ).$$

$$H_{as}(j25\omega_0) = \frac{2}{j25}$$

Entonces

$$|H_{re}(j25\omega_0)|_{db} - |H_{as}(j25\omega_0)|_{db} = 20 \log \left| \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{125+21^2}}}{\frac{2}{25}} \right| = 20 \log \left[\frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{125+21^2}} \right] \approx 4,3db$$

5. La respuesta en régimen del sistema para una entrada sinusoidal pura de la forma $e(t) = V \cdot \cos(\omega_e t)$ viene dada por $r(t) = V \cdot |H(j\omega_e)| \cdot \cos(\omega_e t + \arg[H(j\omega_e)])$. De acuerdo con las asíntotas de baja y alta frecuencia, la fase de la transferencia en régimen es una función continua que se acerca a 0° en baja frecuencia y a -90° en alta frecuencia, por lo que existirá una frecuencia a la cual el sistema introduce un retraso de -30° .
6. La atenuación que el sistema introduce a determinada frecuencia, viene dada por el módulo de la transferencia a la frecuencia de trabajo. Calculamos las distintas atenuaciones a $10\omega_0$, $30\omega_0$ y $50\omega_0$.

$$\blacksquare |H(j10\omega_0)| = \frac{\sqrt{29}}{5} \approx 1,077 \approx 0,66db \text{ (ya calculada).}$$

- $|H(j30\omega_0)| \approx 0,096 \approx -20db$
- $|H(j50\omega_0)| \approx 0,043 \approx -27db$

7. i) Calculamos la serie de Fourier de una onda cuadrada simétrica $g(t)$ de valor medio nulo y pulsación $\omega_g = 10\omega_0$ ($T = 2\pi/(10\omega_0)$). Sabemos ya que $c_0(g) = 0$. Suponemos que

$$g(t) = A, \quad t \in (0, T/2) \quad , \quad g(t) = -A, \quad t \in (T/2, T)$$

Entonces, para $n \neq 0$,

$$c_n(g) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jn\omega_g t} dt = \frac{A}{T} \left[\int_0^{T/2} e^{-jn\omega_g t} dt - \int_{T/2}^T e^{-jn\omega_g t} dt \right]$$

$$c_n(g) = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-jn\omega_g t}}{-jn\omega_g} \Big|_0^{T/2} - \frac{e^{-jn\omega_g t}}{-jn\omega_g} \Big|_{T/2}^T \right] = \frac{A}{-Tjn\omega_g} [e^{-jn\omega_g T/2} - 1 - e^{-jn\omega_g T} + e^{-jn\omega_g T/2}]$$

Tenemos que $T\omega_g = 2\pi$ y $\frac{T}{2}\omega_g = \frac{\pi}{2}$. Entonces

$$c_n(g) = \frac{2A}{-jn2\pi} [e^{-jn\pi} - 1] = \frac{A}{-jn\pi} [(-1)^n - 1]$$

De donde $c_n(g) = 0$ si n par y $c_n(g) = \frac{2A}{jn\pi}$ si n impar.

- ii) De las consideraciones anteriores, sabemos que el peso los distintos armónicos de la onda cuadrada se verá afectado por el valor en dicho armónico del módulo de la transferencia del sistema. Vimos que el tercer y el quinto armónico se atenúan más de 20 db. Lo mismo sucederá con los armónicos superiores, por lo que podemos considerar que sólo pasa el primer armónico. Podemos decir que la salida en régimen del sistema a la onda cuadrada será aproximadamente una senoide de amplitud $(2 \times 1,077 \times A)/\pi$.

Problema 2

(a)

$$\mathcal{F}[v * u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

cambiamos las integrales, u y v son \mathcal{L}_1 por lo tanto la integral de la convolución converge absolutamente

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \quad (2)$$

cambio de variable $z = t - \tau$ en la integral interna

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(z) e^{-j2\pi f(z+\tau)} dz \right] d\tau \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(z) e^{-j2\pi fz} dz \right] d\tau \quad (4)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} v(z) e^{-j2\pi fz} dz \quad (5)$$

$$= \mathcal{F}[v] \cdot \mathcal{F}[u] \quad (6)$$

(b)

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k t_0) \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} [\delta(t - k t_0)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k t_0 f} = \star$$

Hallamos los coeficientes de Fourier del peine al que queremos llegar:

$$c_k \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0) \right) = \frac{1}{f_0} \langle \delta(f), e^{-jk \frac{2\pi}{f_0} f} \rangle = 1$$

por lo tanto

$$f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk \frac{2\pi}{f_0} f} = \star$$

(c) 1.

$$x_m(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k t_s)$$

$$\mathcal{F}[x_m] = \mathcal{F}[x] * \mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k t_s) \right] = X(f) * f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_s)$$

donde $f_s = 1/t_s$

2. En la figura 6 se muestra el espectro de x_m para el caso en que $B \leq f_s$. En la figura

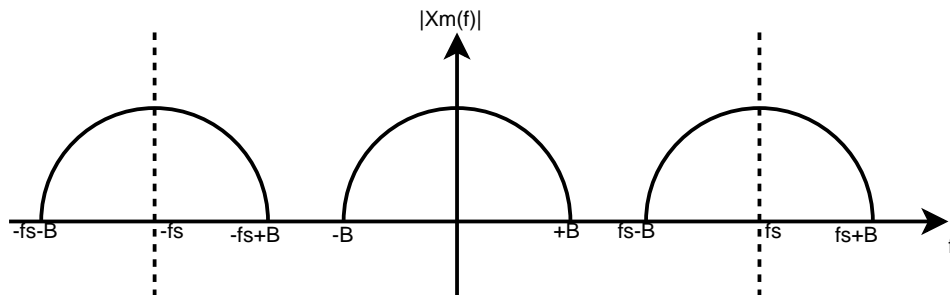


Figura 6: Espectro de x_m para el caso $B \leq f_s$

7 se muestra el espectro de x_m para el caso en que $B > f_s$.

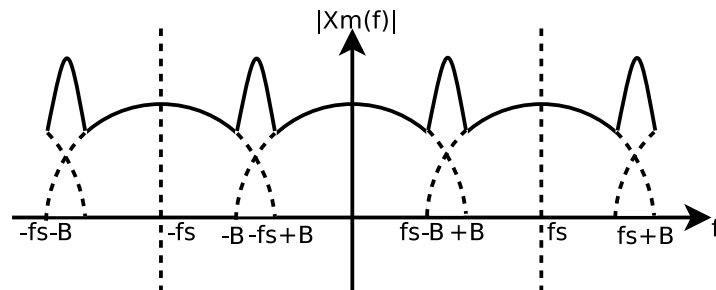


Figura 7: Espectro de x_m para el caso $B > f_s$

- (d) 1. Como estamos en el caso $B < f_s$, para recuperar la señal se necesita un filtro pasabajos que deje pasar el lóbulo principal y anule los restantes, si anulamos los demás lóbulos tenemos una señal cuya transformada de Fourier coincide con la de x_m . Como no disponemos de un pasabajos ideal usamos el filtro A, que es un pasabajos de primer orden (se sugiere hacer el Diagrama de Bode asintótico de módulo).
2. Tenemos que dimensionar los parámetros para que la frecuencia de corte del filtro quede entre B y $f_s - B$. Dada la distancia que hay se puede poner una década por encima de B es decir $\frac{1}{RC} = 10B$ también queda más de una década antes de $f_s - B$.

Problema 3

- (a) Si planteamos las ecuaciones para los nudos, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} I'_1 = I_1 - I_2 \\ I'_2 = I_2 - I_3 \\ I'_3 = I_3 - I_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{como el sistema es equilibrado y perfecto tenemos} \left\{ \begin{array}{l} I'_1 = \sqrt{3}e^{-j30^\circ} I_1 \\ I'_2 = \sqrt{3}e^{-j30^\circ} I_2 \\ I'_3 = \sqrt{3}e^{-j30^\circ} I_3 \end{array} \right. \quad (7)$$

(ver deducción geométrica en las notas del curso).

- (b) Transfiguramos las cargas a estrella y sustituimos las fuentes de corriente por sus equivalentes en estrella (calculadas en la parte anterior). El equivalente monofásico queda como se muestra en la figura 8.

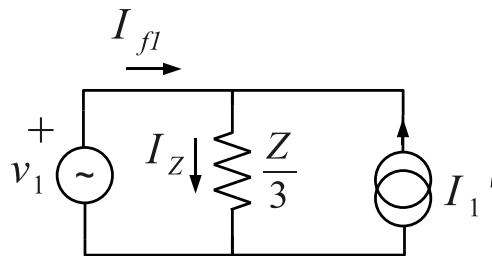


Figura 8: Equivalente monofásico

- (c) Utilizando el equivalente monofásico, tenemos

$$I_z = I_{f1} + I'_1 = \frac{V_1}{(Z/3)} = \frac{3V_1}{R + j\omega L} = \frac{3V_1(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (8)$$

Luego buscamos I'_1 en fase con V_1 e I_{f1} en cuadratura con V_1 , observando la ecuación 8 tenemos,

$$\begin{aligned} I'_1 = \text{Re}(I_z) &\Rightarrow I'_1 = \frac{3V_1 R}{R^2 + (\omega L)^2} \\ I_{f1} = \text{Im}(I_z) &\Rightarrow I_{f1} = \frac{3V_1 (-j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Finalmente, recordando la relación entre $I'_i = I_i$ halladas en la parte (a), obtenemos,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} \frac{3 V_1 R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\sqrt{3} 220}{100} e^{j30^\circ} A$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j150^\circ} \frac{3 V_1 R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\sqrt{3} 220}{100} e^{j150^\circ} A$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j270^\circ} \frac{3 V_1 R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\sqrt{3} 220}{100} e^{j270^\circ} A$$

- (d) Como la corriente por las fuentes está en cuadratura con la tensión, sabemos que las fuentes de tensión solo aportarán potencia reactiva. Por otro lado, las fuentes de corriente aportan toda la potencia activa consumida por las cargas. La potencia reactiva entregada por las fuentes de tensión coincide con la potencia reactiva consumidas por las cargas.

$$P_{fuentes} = 0W$$

$$Q_{fuentes} = 3 \times \text{Im} \{V_{f1} I_{f1}^*\} = 3 \times \frac{220^2 3 \omega L}{R(\omega L)^2} = \frac{220^2 9}{2} VAR$$

- (e) Compensamos la potencia reactiva consumida por las cargas al sistema de fuentes, colocando condensadores en paralelo. El valor de dichos condensadores, debe ser tal, que la potencia reactiva consumida por estos sea $-Q_{fuentes}$.

$$3 \times Q_C = -\frac{220^2 9}{2} = 3 \times V_1^2 \omega C \Rightarrow C = 4,77mF$$

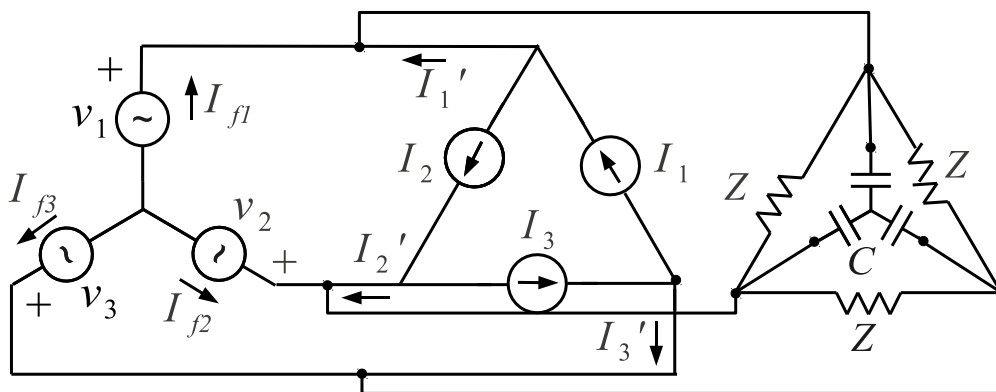


Figura 9:

El esquema de conexión se muestra en la figura 9

- (f) Con el sistema compensado, la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes será nula. Como la potencia reactiva estaba subministrada por las fuentes de tensión y la potencia activa por las fuentes de corrientes, tenemos que para el sistema compensado $P = 0$ y $Q = 0$ (para las fuentes de tensión).