Sistemas Lineales 1 - 2009 - segundo parcial - Solución

23 de julio de 2009

Problema 1

1. Parte a.

Aplicando divisor de tensión, la transferencia del circuito RC queda:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{\omega_a}{j\omega + \omega_a}$$

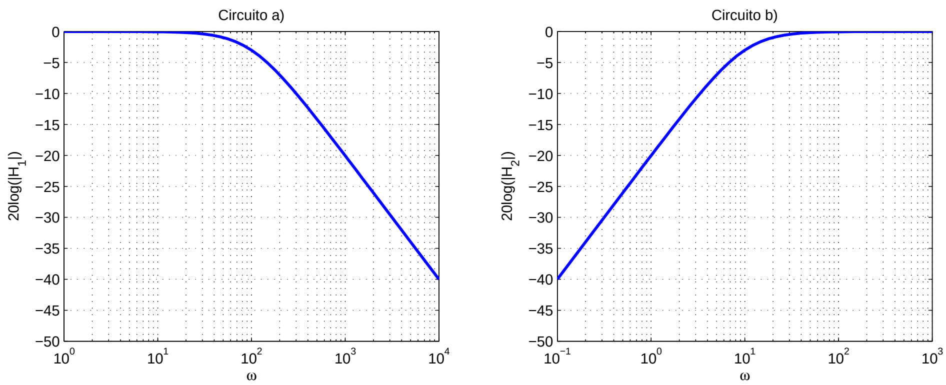
siendo para los valores del problema $\omega_a = \frac{1}{R_1 C} = 100\, rad/s$.

Análogamente, la transferencia del circuito RL queda:

$$H_2(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{R_2}{L} + j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_b}$$

siendo para los valores del problema $\omega_b = \frac{R_2}{L} = 10\, rad/s$.

Y los correspondientes diagramas de bode son:

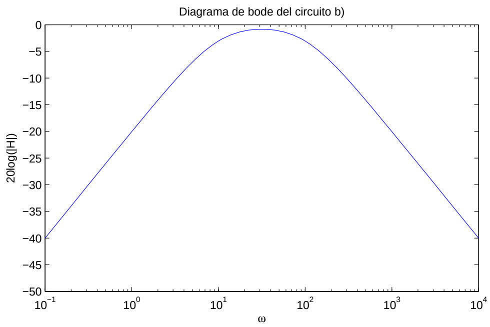


2. Parte b.

La fuente de tensión del circuito b) hace que la transferencia de este circuito sea más sencillo de calcular, ya que los divisores de tensión siguen valiendo. Si V_1 es la tensión en bornes del capacitor entonces $V_1 = H_1 V_i$ y $V_o = H_2 V_1$ por la parte anterior, por lo tanto la transferencia del circuito b) resulta:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

Como la transferencia es el producto, el diagrama de bode de H corresponde a la suma de los diagramas de H_1 y H_2, es decir, un circuito pasabanda (de ganancia 0dB) en la banda $[\omega_b, \omega_a]$.



Para el circuito a) la situación es distinta, debido al acoplamiento. Si se calcula la transferencia no se tienen dos raíces reales como en el caso b) sino raíces complejas de frecuencia natural $\omega_n = 317\, rad/s$.

3. Parte c.

Las transferencias de ambos circuitos son distintas debido a que no es posible aplicar el divisor de tensión para el capacitor, por lo que $V_1 \neq H_1 V_i$. Debido además a que R_2 es muy pequeña, la segunda parte del circuito consume mucha corriente y por ello el comportamiento es cualitativamente distinto.

Sistemas Lineales 1 - Soluciones Segundo Parcial

Problema 2.- a)

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + (2\pi f)^2)} .$$

Sabemos, de las propiedades de Fourier que

$$g(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\cdot) \implies G(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(-\cdot) .$$

Así,

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + (2\pi t)^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\alpha|f|} .$$

También sabemos de las propiedades de Fourier que para $a > 0$,

$$g(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\cdot) \implies g(a\,\cdot) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a}G(\frac{1}{a}\,\cdot) .$$

Así tenemos que (con $a = \frac{1}{2\pi}$)

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + t^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi e^{-2\pi\alpha|f|} .$$

Lo cual implica que

$$\frac{1}{(\alpha^2 + t^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi\alpha|f|} .$$

b) Sabemos de los ejercicios y/o usando las propiedades de Fourier que

$$H(f) = \mathcal{F}\{h\}(f) = \begin{cases} 1 & , \ f \in [-f_0, f_0) \\ 0 & , \ \text{alternativamente} \end{cases} .$$

Además,

$$Y(f) = \mathcal{F}\{h * x\}(f) = H(f)X(f) .$$

Así,

$$X(f) - Y(f) = \begin{cases} 0 & , \ f \in [-f_0, f_0) \\ \frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi\alpha|f|} & , \ \text{alternativamente} \end{cases} .$$

Notemos que la función $X - Y$ es un miembro de $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ (es decir, es de energía finita) por lo tanto la función $x-y$ también lo es, y tenemos que (Teorema de Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) - Y(f)|^2 df = \frac{\pi}{2\alpha^3} e^{-4\pi\alpha f_0} \ .$$

c)

$$y(t) = \int_{-f_0}^{f_0} \frac{\pi}{\alpha} e^{-2\pi\alpha|f|} e^{j2\pi f t} df =$$
$$\frac{1}{2\alpha}\Big(\frac{e^{(j2\pi t - 2\pi\alpha)f_0} - 1}{(jt - \alpha)} + \frac{1 - e^{-(j2\pi t + 2\pi\alpha)f_0}}{(jt + \alpha)}\Big) =$$
$$\frac{1}{(\alpha^2 + t^2)}\Big(1 - \frac{1}{\alpha} e^{-2\pi\alpha f_0}(\alpha\cos(2\pi f_0 t) - t\sin(2\pi f_0 t))\Big) \ .$$

d) $s = y$. En efecto,

$$s(t) = \Big(\big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_S} y(kT_S)\delta(t - kT_S)\big) * \big(f_S \frac{\sin(\pi f_S t)}{(\pi f_S t)}\big)\Big)(t) =$$
$$\Big(\big(y(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_S}\delta(t - kT_S)\big) * \big(f_S \frac{\sin(\pi f_S t)}{(\pi f_S t)}\big)\Big)(t) \ .$$

Así,

$$S(f) = \big(Y(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_S)\big)(f)\, P_{\frac{f_S}{2}}(f) =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(f - kf_S)\, P_{\frac{f_S}{2}}(f) = Y(f) \ .$$

Donde la última igualdad sigue del hecho que $f_S > 2f_0$. Hemos también usado $P_{\frac{f_S}{2}}$ para denotar

$$P_{\frac{f_S}{2}}(f) = \begin{cases} 1 & , \ f \in [-\frac{f_S}{2}, \frac{f_S}{2}) \\ 0 & , \ \text{alternativamente} \end{cases} \ .$$

Problema 4

Docentes de Sistemas Lineales 1

8 de julio de 2009

a)

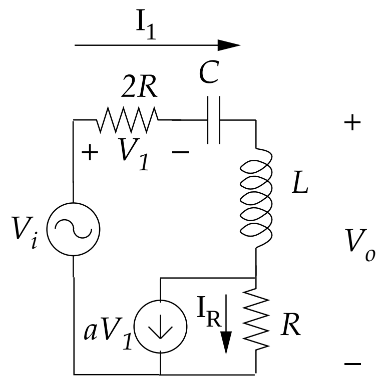


Figura 1: Circuito del problema con las corrientes I_1 e I_R definidas

Definiendo las corrientes I_1 e I_R como en la figura 1 , el voltaje de salida queda

$$\begin{aligned} V_o &= Lj\omega I_1 + RI_R = Lj\omega I_1 + R\left(I_1 - a.V_1\right) & (1)\\ &= \left[Lj\omega + R\left(1 - 2Ra\right)\right] I_1 = \left[Lj\omega + R\left(1 - 2aR\right)\right] \frac{V_i - V_o}{2R + {}^1\!/_{Cj\omega}} & (2)\end{aligned}$$

Donde al final sustituimos la corriente I_1en función de V_i y V_o

$$\Rightarrow \quad V_o\left(2RCj\omega + 1\right) = Cj\omega\left[Lj\omega + R\left(1 - 2aR\right)\right]\left(V_i - V_o\right) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & V_o\left[2RCj\omega + 1 + LC\left(j\omega\right)^2 + RCj\omega\left(1 - 2aR\right)\right] \\ & = Cj\omega\left[Lj\omega + R\left(1 - 2aR\right)\right] V_i & (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore H\left(j\omega\right) = \frac{V_o}{V_i} &= \frac{Cj\omega\left[Lj\omega + R\left(1 - 2aR\right)\right]}{2RCj\omega + 1 + LC\left(j\omega\right)^2 + RCj\omega\left(1 - 2aR\right)} & (5)\\ &= \frac{Cj\omega\left[Lj\omega + R\left(1 - 2aR\right)\right]}{LC\left(j\omega\right)^2 + RCj\omega\left(3 - 2aR\right) + 1} & (6)\end{aligned}$$

b)

Dividiendo entre RC en el numerador y el denominador $H\left(j\omega\right)$ queda:

$$\begin{aligned} H\left(j\omega\right) &= \frac{j\omega\left(j\omega + {}^R\!/_L\left(1 - 2aR\right)\right)}{\left(j\omega\right)^2 + \left(3 - 2aR\right){}^R\!/_L j\omega + \frac{1}{LC}} & (7)\\ &= \frac{j\omega\left(j\omega + \omega_0\left(1 - 2aR\right)\right)}{\left(j\omega\right)^2 + \left(3 - 2aR\right)\omega_0 j\omega + \frac{1}{LC}} & (8)\end{aligned}$$

Para que la transferencia quede como pide la letra:

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{R\omega_0} \tag{9}$$

$$1 - 2aR = -1 \Rightarrow aR = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{R} \tag{10}$$

Con la condición anterior también se cumple:

$$3 - 2aR = 1 \tag{11}$$

c)

$$H\left(j\omega_0\right) = \frac{j\omega_0\left(j\omega_0 - \omega_0\right)}{\left(j\omega_0\right)^2 + j\omega_0^2 + \omega_0^2} = \frac{j\left(j-1\right)}{j} = j - 1 = \sqrt{2}\measuredangle\frac{3\pi}{4} \tag{12}$$

El módulo nos da por cuanto se multiplica la amplitud y el argumento nos da el desfasaje de la salida respecto a la entrada por lo tanto en régimen la salida es: $v_0\left(t\right) = A\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$

d)

Raices del numerador: ω_0

Raices del denominador: Complejas conjugadas con $\zeta = {}^{1}\!/_{2}$y módulo ω_0

Realizamos el análisis por banda:

$\omega \ll \omega_0$: $H\left(j\omega\right) \simeq -j\dfrac{\omega}{\omega_0}$, el módulo crece a $20\,{}^{\mathrm{db}}\!/_{\mathrm{dec}}$ y el argumento es $\frac{3\pi}{2}$.

$\omega \gg \omega_0$: $H\left(j\omega\right) \simeq 1$, el módulo vale $0\,\mathrm{db}$ el argumento es 0 o 2π. Como hay tres raíces con el mismo módulo, del análisis por bandas no podemos deducir a priori si el argumento varía ${}^{\pi}\!/_{2}$ o ${}^{3\pi}\!/_{2}$. Pero de la parte anterior sabemos que el argumento tiene que valer ${}^{3\pi}\!/_{4}$ en ω_0 por lo tanto el argumento debe disminuir.

Con estos datos los diagramas de Bode quedan:

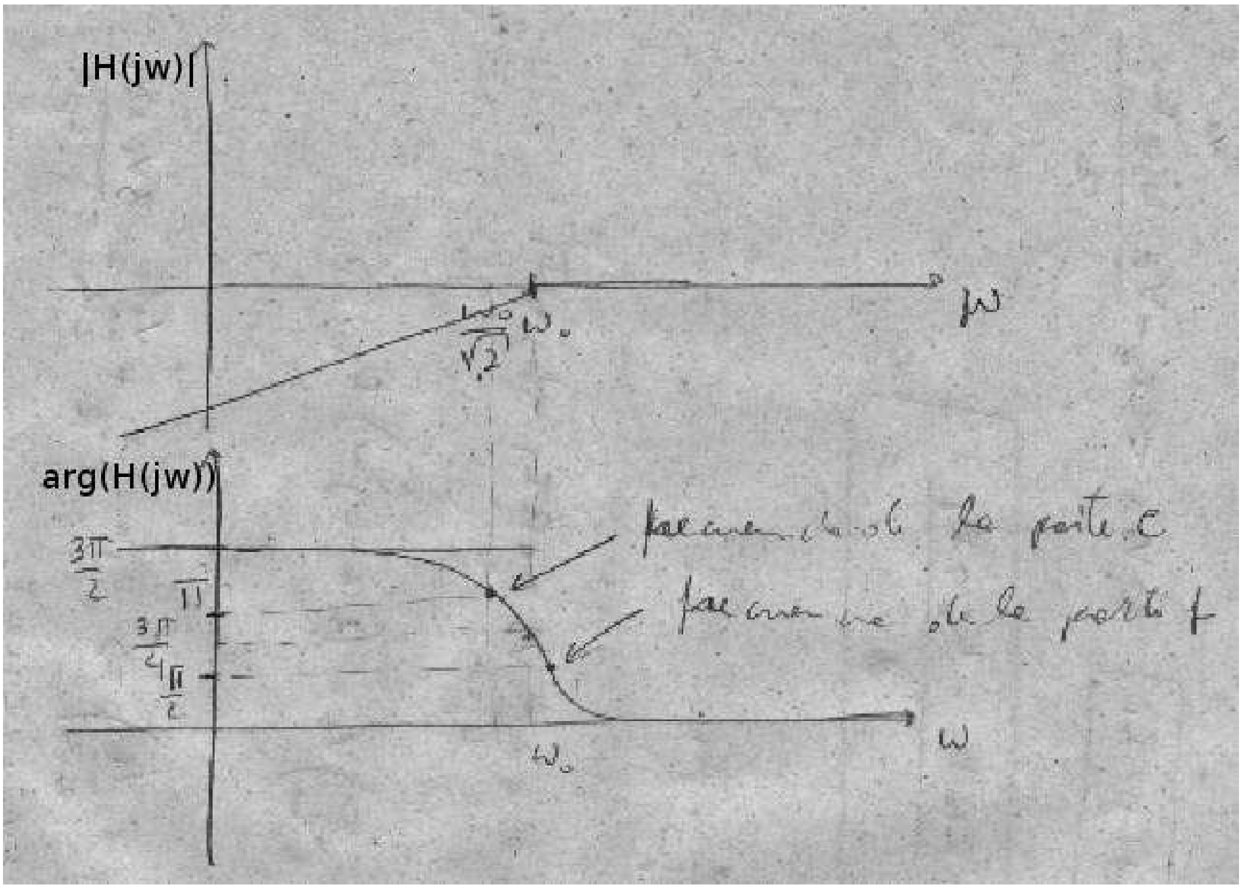


Figura 2: Diagramas de Bode

e)

i-

La fase baja continuamente desde $3\pi/2$ a 0 por lo tanto debe pasar por π. A la frecuencia que esto ocurre los fasores de entrada y salida tienen un ángulo de π entre ellos, por lo cual son colineales.

ii-

Según lo visto los fasores son colineales a la frecuencia a la cual $H(j\omega)$ es un número real negativo:

$$H(j\omega) = -\alpha \quad \therefore \quad j\omega(j\omega - \omega_0) = -\alpha\left[(j\omega)^2 + \omega_0 j\omega + \omega_0^2\right] \tag{13}$$

Igualando parte real:

$$-\omega_0^2 = -\alpha\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \tag{14}$$

Igualando parte imaginaria y usando lo obtenido en la ecuación anterior ($\alpha = 1$):

$$-\omega^2 = -\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \quad \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

Como $\alpha = 1$ la ganancia es 0 db.

f)

i-

Por lo mismo que en la parte e.i la fase de $H(j\omega)$ debe pasar por $\pi/2$.

ii-

Según lo visto los fasores son colineales a la frecuencia a la cual $H(j\omega)$ es un número imaginario puro con parte imaginaria positiva:

$$H(j\omega) = j\alpha \quad \therefore \quad \omega(j\omega - \omega_0) = \alpha\left[(j\omega)^2 + \omega_0 j\omega + \omega_0^2\right] \tag{16}$$

Igualando parte imaginaria:

$$\omega^2 = \alpha\omega\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{17}$$

Igualando parte imaginaria y usando lo obtenido en la ecuación anterior ($\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$):

$$-\omega\omega_0 = \frac{\omega}{\omega_0}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \quad \Rightarrow -\omega_0 = \omega_0 - \frac{\omega^2}{\omega_0} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_0 \tag{18}$$

Como $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2}$ la ganancia es 3 db