

Sistemas Lineales 1

Segundo Parcial, 11 de julio del 2007

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (20 puntos)

- (a) En el circuito de la Figura 1 hallar las transferencias $H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ y $H_2(j\omega) = \frac{I_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

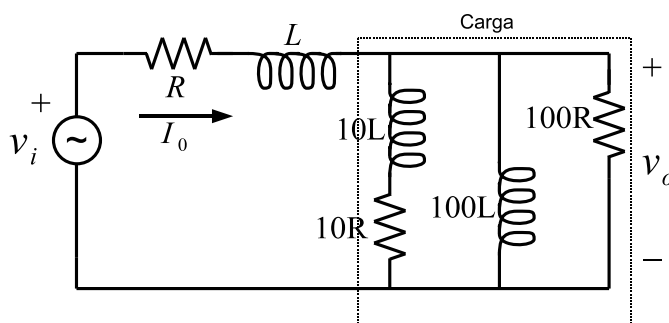


Figura 1:

En las siguientes partes, se debe **JUSTIFICAR LA VALIDEZ DE LAS APROXIMACIONES REALIZADAS**.

- (b) i) Realizar los Diagramas de Bode de H_1 y H_2 mostrando que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega)^2 + 112\omega_0j\omega + \omega_0^2}, \quad H_2(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 12\omega_0j\omega + \omega_0^2}{L((j\omega)^2 + 112\omega_0j\omega + \omega_0^2)(j\omega + \omega_0)}$$

- ii) Mostrar que $H_1(j\omega)$ es un filtro pasabanda y hallar **aproximadamente** el ancho de banda de dicho filtro.

- (c) De las observación de los Diagramas de Bode:

- i) Determinar, **aproximadamente**, la frecuencia angular ω' a la cual el módulo de la potencia aparente consumida por la carga es máximo.
- ii) Hallar $v_o(t)$ cuando la entrada es $v_i(t) = 1V \cos(\omega' t)$.
- iii) Determinar, **aproximadamente**, a qué frecuencia la potencia activa consumida por la carga es igual a la reactiva.

Problema 2 (16 puntos)

- (a) En esta parte se trabaja con el circuito de la Figura 2, donde la fuente es sinusoidal de voltaje V y $\omega^2 < \frac{1}{LC}$

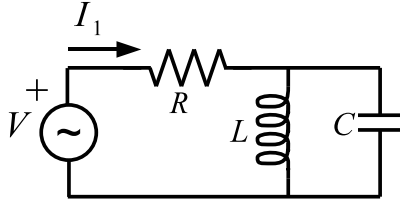


Figura 2:

- i) Calcular $I_1(j\omega)$. Para el resto de la parte (a) considere:

$$R = 10\Omega, \quad f = 50\text{Hz}, \quad C = 100\mu\text{F},$$

$$L = 20\text{mHy}, \quad V_{\text{RMS}} = 220\text{V}$$

- ii) La carga que alimenta la fuente, ¿es inductiva o capacitiva?. Justificar.
- iii) ¿Qué componente eléctrico colocaría en bornes de la fuente para compensar la potencia reactiva consumida por la carga?. Calcular el valor del mismo.

- iv) Calcular numéricamente $I_1(j\omega)$ y la corriente $I_c(j\omega)$ que atraviesa al componente eléctrico calculado en la parte anterior. Hacer un diagrama fasorial de I_1 , I_C y V . ¿Cómo deduciría a partir del mismo que la carga que ve la fuente es puramente real?

- (b) Se el circuito de la Figura 3, donde las componentes tienen los siguientes valores:

$$v_1(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi ft)$$

$$v_2(t) = 220\sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Z es la impedancia de carga de la parte (a), $f = 50\text{Hz}$.

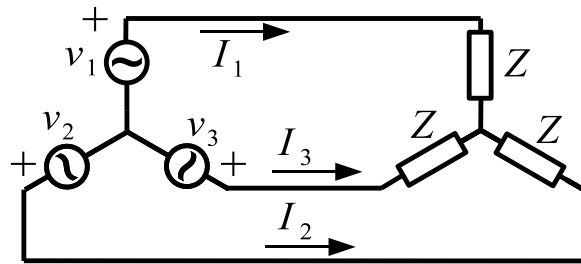


Figura 3:

- i) Calcular las corrientes de líneas $I_1(j\omega)$, $I_2(j\omega)$ e $I_3(j\omega)$. Realizar un diagrama fasorial de las mismas. Hallar la expresión temporal de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.
- ii) Como compensaría la potencia reactiva consumida por las cargas? Indicar el valor de las componentes que agregaría, y dibujar donde las colocaría en el circuito.

Problema 3 (12 puntos)

- (a) Consideremos una función $x(t)$ y su Transformada de Fourier (TdF) $X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f)$. Hallar $\mathcal{F}[x(t - \tau)](f)$.
- (b) Se sabe que $\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0)$. Hallar $\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)](f)$.
- (c) Hallar $\mathcal{F}[p_\tau(t)](f)$, la TdF del pulso unitario de ancho τ centrado en el origen.
- (d) Hallar, **sin utilizar integración directa**, la TdF de la función

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & , 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{Considere } f_0 = \frac{5}{T}$$

Bosquejar el módulo de $X(f)$.

Problema 4 (12 puntos)

Se considera el circuito de la Figura 4, en régimen sinusoidal, en el que se adoptan las orientaciones indicadas para las corrientes I_1 e I_2 . Se sugiere llamar: $L_1\omega = X_1$, $L_2\omega = X_2$, $L_3\omega = X_3$.

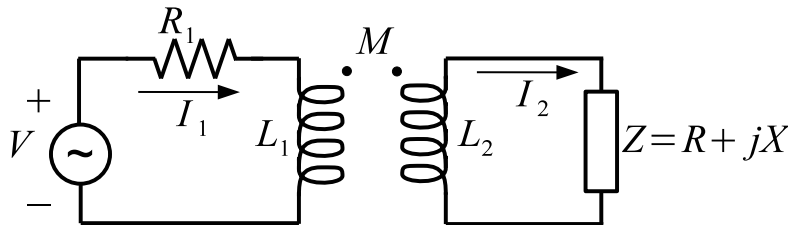


Figura 4:

- (a) Suponiendo el fasor I_2 real, dibujar el diagrama fasorial de la KVM (ecuación de Kirchoff de voltaje) de la malla secundaria, y deducir la ubicación del fasor I_1 respecto de I_2 .
- (b) En un dibujo separado, representar el esquema de diagrama fasorial de la KVL de la malla primaria, mostrando los fasores V , I_1 , e I_2 .
- (c) Resolver analíticamente el circuito, hallando las expresiones de los fasores I_1 , I_2 en función de la tensión V .
- (d) Hallar una condición entre R , R_1 , X , X_1 , X_2 y X_3 para que los fasores V e I_2 sean colineales.

Solución

Problema 1

- (a) Para hallar la transferencia usamos el divisor de tensión, con Z_2 la impedancia de carga y Z_1 la serie de R y L .

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + (Lj\omega + R) \left(\frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega} \right)} = \frac{100}{100 + (j\omega + \omega_0) \left(\frac{10}{j\omega + \omega_0} + \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{j\omega} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \frac{100j\omega\omega_0}{110j\omega\omega_0 + (j\omega + \omega_0)^2}$$

Donde se sustituyó R/L por ω_0

$$\Rightarrow H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega)^2 + 112\omega j\omega_0 + \omega_0^2}$$

La impedancia vista es la impedancia equivalente:

$$Z_v(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{1}{\frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega}} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{(R+Lj\omega)^2}{100RLj\omega} + 1}{\frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{(R+Lj\omega)^2}{100RLj\omega} + 1 \right) (Lj\omega + R) 100RLj\omega}{10RLj\omega + (Lj\omega + R)^2} = \frac{(110RLj\omega + (R + Lj\omega)^2) (Lj\omega + R)}{(Lj\omega)^2 + 12RLj\omega + R^2}$$

$$Z_v(j\omega) = L \frac{((j\omega)^2 + 112\omega_0 j\omega + \omega_0^2) (j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 12\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

Por lo tanto:

$$H_2(j\omega) = Z_v^{-1} = \frac{(j\omega)^2 + 12\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{L((j\omega)^2 + 112\omega_0 j\omega + \omega_0^2)(j\omega + \omega_0)}$$

- (b) Obtengo las raíces del numerador y del denominador.

Numerador:

$$-\omega_0, \left(-56 \pm \sqrt{56^2 - 1} \right) \omega_0 = -8,9 \times 10^{-3} \omega_0, -112\omega_0$$

Denominador:

$$\left(-6 \pm \sqrt{6^2 - 1} \right) \omega_0 = -84 \times 10^{-3} \omega_0, -11,9\omega_0$$

Entonces:

$$\omega_1 = 8,9 \times 10^{-3} \omega_0, \omega_2 = 84 \times 10^{-3} \omega_0, \omega_3 = 11,9\omega_0 \text{ y } \omega_4 = 112$$

Por lo que H_1 y H_2 quedan:

$$H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_4)}, \quad H_2(j\omega) = \frac{(j\omega + \omega_2)(j\omega + \omega_3)}{(j\omega + \omega_0)(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_4)}$$

Ordenando los módulos de las raíces nos queda $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_0 \ll \omega_3 \ll \omega_4$.

Veamos el diagrama de Bode de H_1 :

- Para $\omega \ll \omega_1$,

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100j\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{100}{\omega_0} \right) + 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H_1(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_4$,

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100\omega_0}{\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{100}{112} \right) dB \\ Arg(H_1(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_4 \ll \omega$,

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(100\omega_0) - 20 \log(\omega) dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

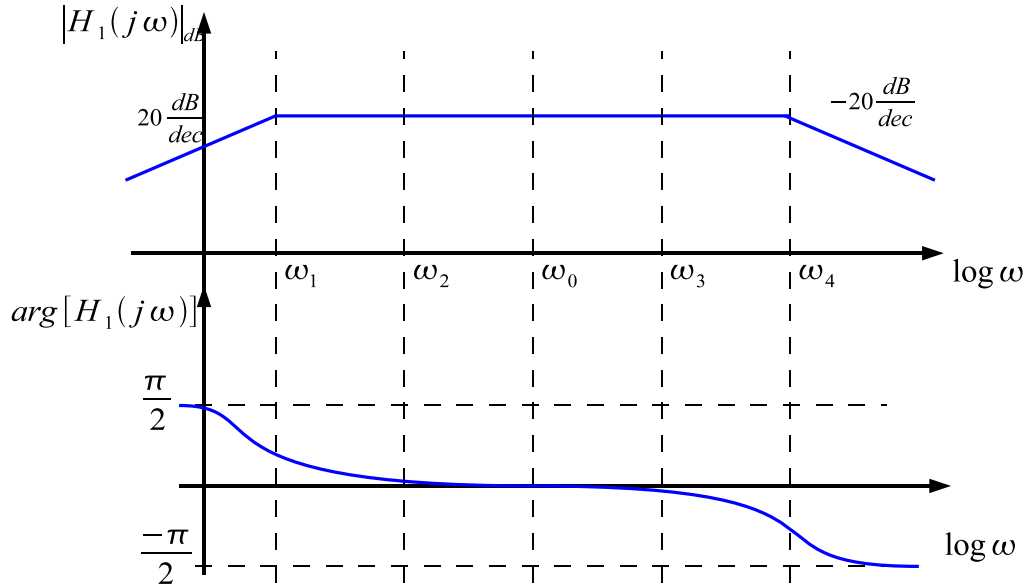


Figura 5: Diagrama de Bode para $H_1(j\omega)$

Para $H_2(j\omega)$:

- Para $\omega \ll \omega_1$,

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_2\omega_3}{L\omega_0\omega_1\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{1}{112L\omega_0} \right) dB \\ Arg(H_2(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$,

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_2\omega_3}{L\omega_0j\omega\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(Lj\omega) dB \\ Arg(H_2(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_0$,

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_3}{L\omega_0\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{11.9}{112L\omega_0} \right) dB \\ Arg(H_2(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_3$,

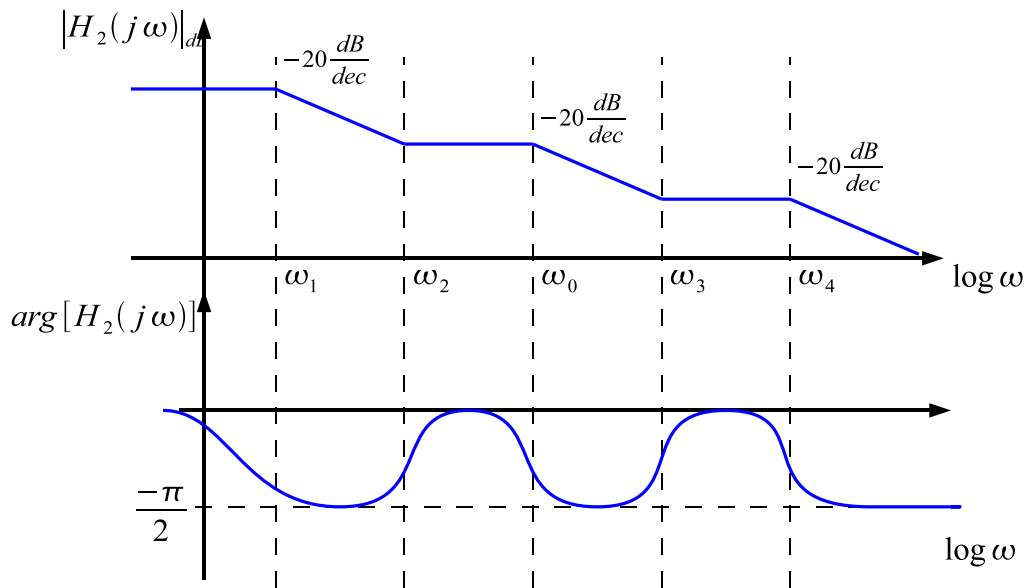
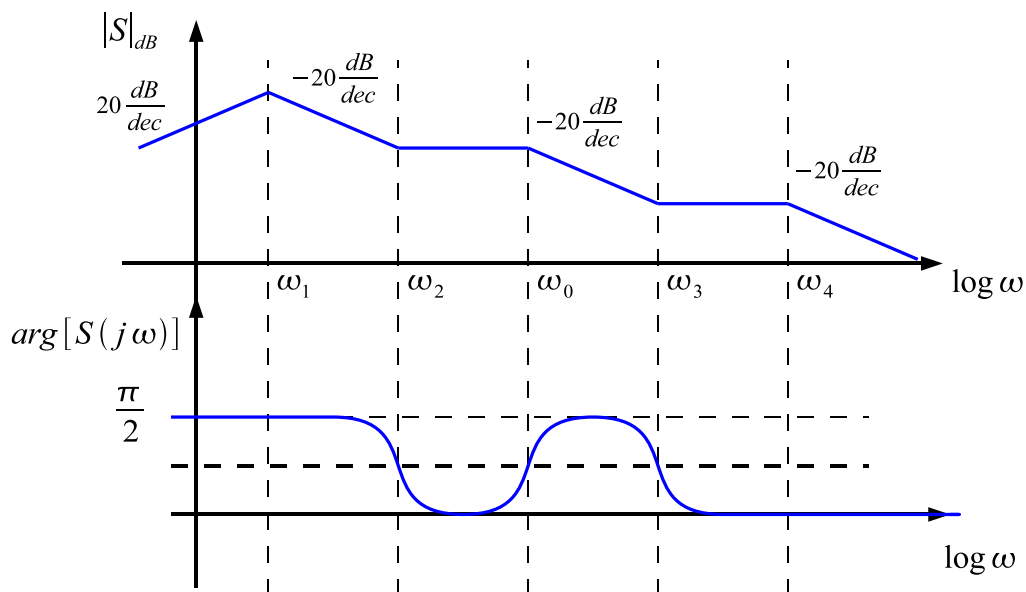
$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_3}{Lj\omega\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{11.9}{112L} \right) - 20 \log(\omega) dB \\ Arg(H_2(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_3 \ll \omega \ll \omega_4$,

$$H_2(j\omega) \approx \frac{1}{L\omega_4} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{1}{112L\omega_0} \right) dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_4 \ll \omega$,

$$H_2(j\omega) \approx \frac{1}{Lj\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H_2(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(L\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Figura 6: Diagrama de Bode para $H_2(j\omega)$ Figura 7: Diagrama de Bode para $S(j\omega)$

- (c) 1) La potencia aparente S es $S = V\bar{I} = H_1\bar{H}_2|V_i|^2$ por lo que su modulo es $|S| = |V||I| = |H_1||H_2||V_i|^2$. Si hiciéramos un diagrama de Bode de modulo de la potencia aparente seria la suma de ambos diagramas, dicho diagrama se ilustra en la figura 7; de ambos diagramas se puede observar que para $\omega \ll \omega_1$ el diagrama de H_1 es creciente y el de H_2 con asíntota horizontal, luego de eso los dos diagramas son decrecientes o de asíntota horizontal, por lo que el máximo del asíntótico de S estará en ω_1 . Todas las raíces de la transferencia, tanto en el numerador como en el denominador, están separadas aproximadamente al menos una década, por lo cual para estudiar lo que pasa en el

entorno de una raíz se puede despreciar el aporte de las demás. Como el asintótico de S tiene un máximo en ω_1 el real tendrá el máximo en ese lugar, de hecho sabemos que la diferencia en los diagramas reales de H_1 y H_2 con los respectivos asintóticos es de $3db$ por lo que la diferencia total es de $6db$.

$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \omega_1 = 8,9 \times 10^{-3} \omega_0}$$

- ii) Como dijimos en la parte i) la diferencia entre el diagrama de Bode real y el asintótico de $|H_1|$ es de $3db$ a la frecuencia ω' por lo que $vo(t) = \frac{100}{112\sqrt{2}}V \cos\left(\omega' t + \frac{\pi}{4}\right) = 0,63V \cos\left(\omega' t + \frac{\pi}{4}\right)$
- iii) Para esta parte tenemos que encontrar las frecuencias a las cuales $arg(S) = \frac{\pi}{4}$ el argumento de S es $arg(S) = arg(V_o) + arg(\bar{I}) = arg(H_1) - arg(H_2)$. Por lo tanto tenemos que restar los diagramas de Bode de H_1 y H_2 . Se puede ver que los aportes de fase debidos a los polos en ω_1 y ω_4 se cancelan pues aparecen en ambos denominadores, por lo que el diagrama de Bode de S queda como en la Figura 7, donde se ve que las frecuencias a las cuales $arg(S) = \frac{\pi}{4}$ son ω_2 , ω_0 y ω_3 .

Problema 2

- (a) i) Trabajaremos en fasores, con voltajes y corrientes en valores eficaces.

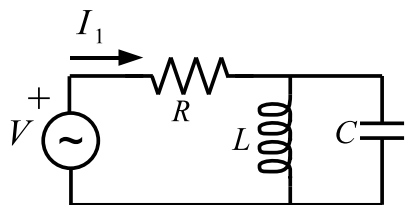


Figura 8:

$$I_1(j\omega) = \frac{V}{Z_{eq}}$$

Donde Z_{eq} es la impedancia de carga de la fuente.

$$\Rightarrow I_1(j\omega) = V \frac{1 + (j\omega)^2 LC}{R(1 + (j\omega)^2 LC) + j\omega L}$$

- ii) Evaluando Z_{eq} para los valores dados en el problema, tenemos:

$$Z_{eq} = R + \frac{j\omega L}{1 + (j\omega)^2 LC} = (10 + j7,85)\Omega$$

La carga es entonces **inductiva** ya que tiene parte imaginaria mayor que cero.

- iii) Para compensar la carga inductiva, se debe colocar un capacitor, como se muestra en la Figura 9, de valor tal, que la impedancia vista por la fuente sea real. Calculando la

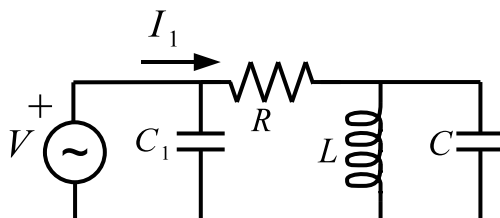


Figura 9:

admitancia de la carga equivalente, obtenemos:

$$Y_{eq} = \left(j\omega C_1 + \frac{1}{10 + j7,82} \right) \frac{1}{\Omega} = (j\omega C_1 + 0,062 - j0,049) \frac{1}{\Omega}$$

Para que sea puramente real, se debe cumplir:

$$\omega C_1 = 0,049 \Rightarrow C_1 = 156\mu F$$

- iv) Utilizando los valores dados para las componentes, y la parte a)i), tenemos:

$$I_1(j\omega) = (13,66 - j10,67)A = 17,33A \angle -38^\circ$$

$$I_C(j\omega) = Vj\omega C_1 = j10,78A = 10,78A \angle 90^\circ$$

El diagrama fasorial, se muestra en la Figura 10. La corriente que entrega la fuente es $I_1 + I_C$; I_C cancela la parte imaginaria de I_1 como se puede ver en la Figura, por lo que la impedancia vista desde la fuente es puramente real.

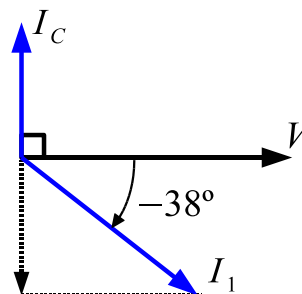


Figura 10:

- (b) 1) Al ser el sistema equilibrado y perfecto, se puede trabajar con el equivalente monofásico, que coincide con el circuito mostrado en la Figura 8. Las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , son iguales en módulo a $I_1(j\omega)$ de la parte a)i), y con un desfase de 120° entre sí. En la Figura 11 se muestra el diagrama fasorial.

$$I_1(j\omega) = 17,33A \angle -38^\circ$$

$$I_2(j\omega) = 17,33A \angle 82^\circ$$

$$I_3(j\omega) = 17,33A \angle 202^\circ$$

Pasando al tiempo I_1 , I_2 e I_3 :

$$i_1(t) = 17,33 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0,66) A$$

$$i_2(t) = 17,33 \sqrt{2} \cos(\omega t + 1,43) A$$

$$i_3(t) = 17,33 \sqrt{2} \cos(\omega t + 3,53) A$$

Con $\omega = 2\pi 50 \text{ rad/seg}$

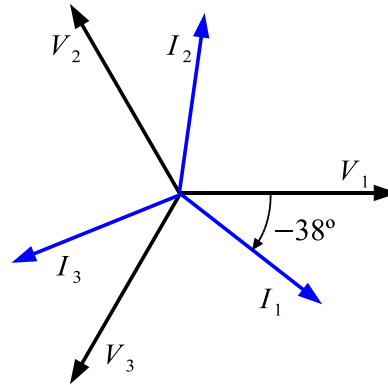


Figura 11:

- ii) Como las cargas son inductivas, la potencia reactiva, la podemos compensar agregando capacitores en paralelo a las cargas, como se muestra en la Figura 12, el valor de los capacitores, coincide con el calculado en la parte a)iii) $\Rightarrow C_1 = 156 \mu F$

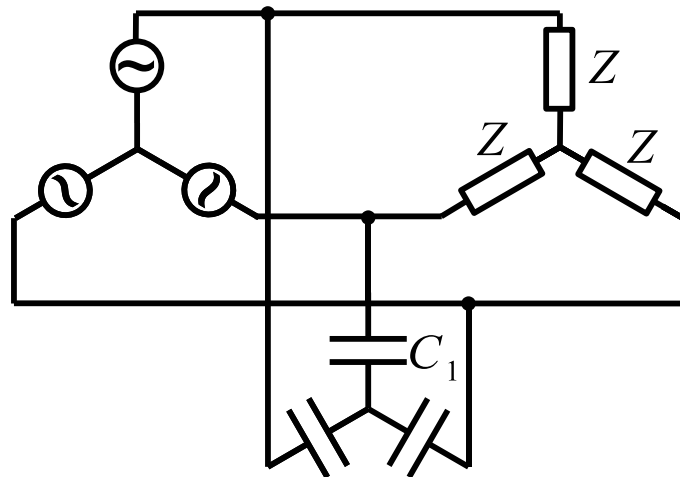


Figura 12:

Problema 3

- (a) Por definición,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Entonces,

$$\mathcal{F}[x(t - \tau)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi f(\tau+u)} du = e^{-j2\pi f\tau} \cdot X(f)$$

Como acabamos de demostrar, el retraso temporal, se traduce, en un desfase en frecuencia.

- (b) Sabemos que
- $\mathcal{F}[e^{+j2\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0)$
- . Entonces, como

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+2\pi f_0 t} + e^{-2\pi f_0 t}}{2}$$

por linealidad de la TdF, tenemos que

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)](f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

- (c)

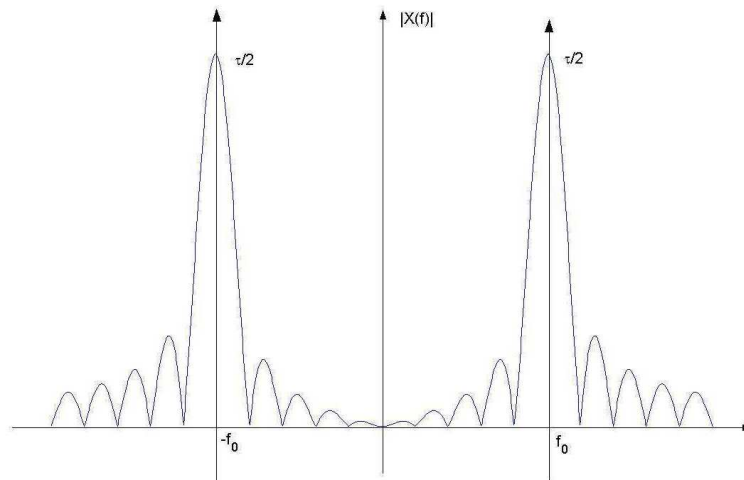
$$\mathcal{F}[p_\tau(t)](f) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

- (d) Observemos que la señal
- $x(t)$
- es un coseno de frecuencia
- f_0
- mirado en el intervalo
- $[0, \tau]$
- . Podemos escribir
- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot p_\tau(t - \frac{\tau}{2})$
- . Entonces:

$$\mathcal{F}[x(t)](f) = \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] * e^{-\pi f\tau} \cdot \tau \text{sinc}(f\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[x(t)](f) = \frac{\tau}{2} \left[e^{-\pi(f-f_0)\tau} \cdot \tau \text{sinc}((f-f_0)\tau) + e^{-\pi(f+f_0)\tau} \cdot \tau \text{sinc}((f+f_0)\tau) \right]}$$

Donde hemos aplicado las partes anteriores y hemos usado que el producto ordinario se transforma en el producto convolución. Por último el hecho de que convolucionar con una delta corrida es lo mismo que correr la señal.



Problema 4

- (a) Sea $I_2 \in \mathbb{R}$, y definamos $X_3 = M\omega$.

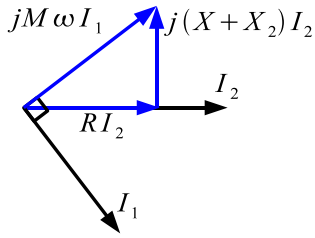


Figura 13:

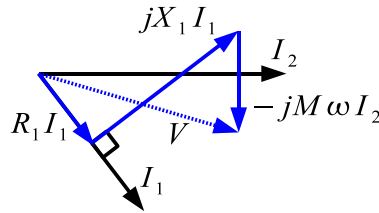
De la ecuación de Kirchoff para la malla secundaria,

$$\begin{aligned} ZI_2 + L_2\omega jI_2 - M\omega jI_1 &= 0 \\ (R + jX)I_2 + jX_2I_2 - M\omega jI_1 &= 0 \\ RI_2 + j(X + X_2)I_2 &= j\omega MI_1 \end{aligned}$$

En la Figura 13 se ilustra el diagrama fasorial, para el caso en que $X + X_2 > 0$

- (b) Si observamos ahora la malla primaria, obtenemos:

$$V = R_1I_1 + L_1j\omega I_1 - Mj\omega I_2$$



- (c) Utilizando las partes anteriores, tenemos:

$$V = R_1I_1 + L_1j\omega I_1 - Mj\omega I_2 \quad (1)$$

$$ZI_2 + L_2\omega jI_2 - M\omega jI_1 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R_1 + jX_1)I_1 - M\omega jI_2 = V \\ -M\omega jI_1 + [R + j(X + X_2)]I_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema dado en (3) obtenemos:

$$I_1 = \frac{[R + j(X + X_2)]V}{RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2\omega^2 + j[RX_1 + R_1(X + X_2)]}$$

$$I_2 = \frac{M\omega jV}{RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2\omega^2 + j[RX_1 + R_1(X + X_2)]} \quad (4)$$

- (d) Para que I_2 sea colineal con V , anulamos la parte real del denominador en (4), obteniendo

$$RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{RR_1 + M^2\omega^2 = X_1(X + X_2)}$$