

Sistemas Lineales 1

Segundo Parcial, 11 de julio de 2006

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (12 puntos)

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal,

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad \text{con } 0 < \zeta^2 < 1 \text{ y } \omega_n > 0.$$

- Mostrar que el denominador puede escribirse como $(j\omega + z)(j\omega + \bar{z})$, siendo $z = \alpha + j\beta$ un número complejo con partes real e imaginaria no nulas. Hallar α y β , en función de ζ y ω_n .
- Para $\zeta > 0$, dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, explicando claramente como los construye (en particular el diagrama de fase), e indicando los valores de abscisas, ordenadas y pendientes que correspondan. Describir qué cambia si se toma $\zeta < 0$.
- Hallar $\zeta > 0$ tal que $|H(j\omega_n)| = 20 \text{ dB}$ (ese valor, que llamaremos ζ_0 será usado en el resto del problema)
- Para las frecuencias $\frac{\omega_n}{2}$ y $10\omega_n$ hallar:
 - el valor respectivo de $|H(j\omega)|$ y ubicarlo en el diagrama construido en la parte **b**).
 - las distancias "real-asintótico" en decibeles.

Problema 2 (16 puntos)

Se tiene un sistema trifásico equilibrado y perfecto de fuentes V_1 , V_2 y V_3 que se muestra en la Figura 1. Se considera un carga trifásica formada por tres impedancias idénticas de valor Z que pueden conectarse tanto en estrella como en triángulo.

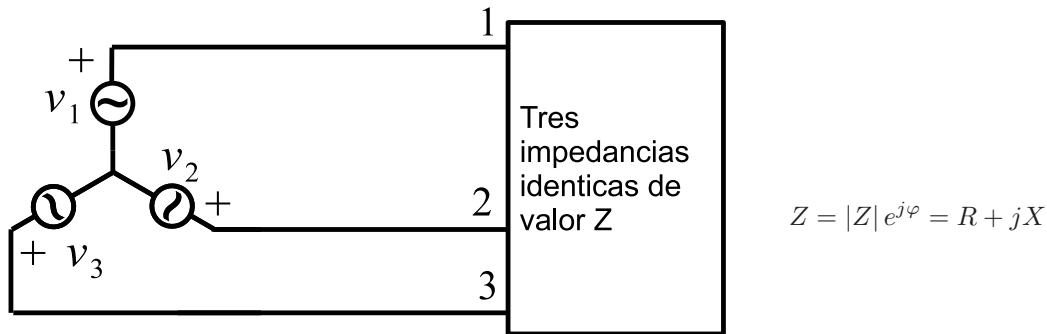


Figura 1:

- (a) Conectar las cargas al sistema de fuentes de manera tal que la potencia activa consumida a dicho sistema sea mínima. **JUSTIFICAR LA RESPUESTA.** Para dicha elección, calcule el valor temporal de las tres corrientes de línea.
- (b) Para $Z = R + Lj\omega$ y la conexión elegida en la parte anterior,
 - i) Calcular la potencia reactiva Q consumida al sistema de fuentes.
 - ii) Diseñar una compensación de dicha potencia reactiva.
 - iii) Conectar dicha compensación de manera tal de minimizar el valor de las componentes diseñadas.
 - iv) Calcular la potencia activa P luego realizada la compensación.
- (c) En la Figura 2, hallar el valor exacto que debe tener el cociente n_1/n_2 , para asegurar que los dos siguientes circuitos sean equivalentes desde el punto de vista de las corrientes consumidas al sistema de fuentes. Recordando que n_1 y n_2 son las vueltas respectivas de primario y secundario, de los transformadores ideales del circuito, dar un valor posible del cociente n_1/n_2 que aproxime el valor exacto deseado.

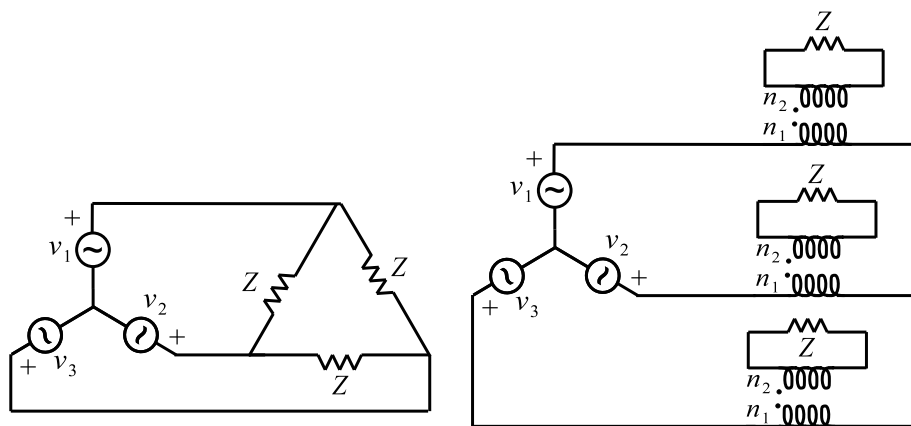


Figura 2:

Problema 3 (12 Puntos)

- (a) Hallar la Transformada de Fourier $\mathcal{F}[P_T(t)](f)$ del pulso de la Figura 3
- (b) Calcular la integral impropia y verificar que dicho valor no depende de T .

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x T)}{\pi x} dx$$

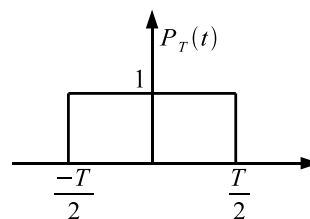


Figura 3:

- (c) Se considera el sistema de la Figura 4. Bosquejar aproximadamente los espectros de las señales $x(t)$, $r_1(t)$ y $r_2(t)$ e indicar cuál de las dos señales $r_1(t)$ y $r_2(t)$ tiene más energía. **JUSTIFICAR.**

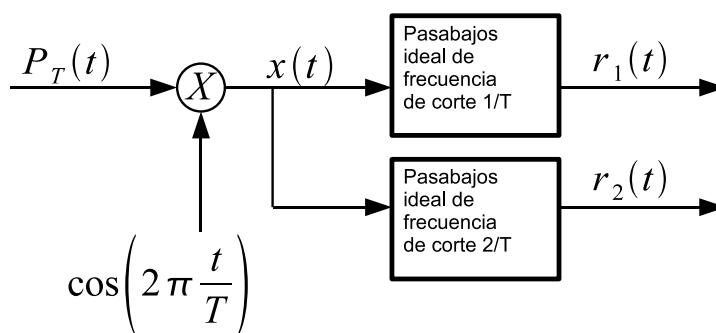


Figura 4: Diagrama de Bloques

Problema 4 (20 puntos)

Sea el circuito de la Figura 5, con $\frac{L}{R} = \frac{1}{100\omega_0}$, $RC = \frac{100}{\omega_0}$.

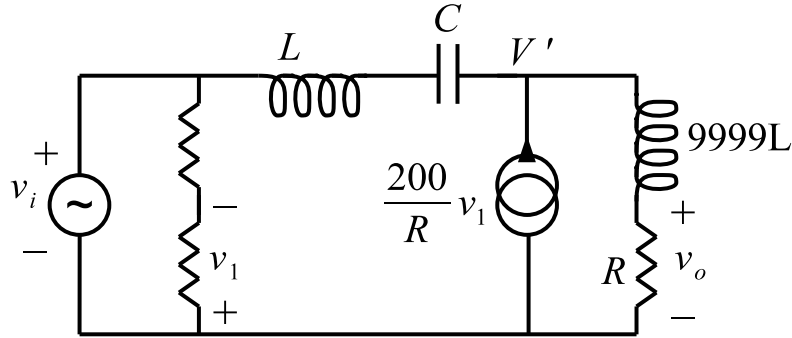


Figura 5:

- (a) Hallar la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

De ahora en más, asumir que la transferencia se puede escribir así:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{100} \frac{(j\omega)^2 - \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{100}(j\omega) + \frac{\omega_0^2}{10^4}}$$

- (b) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos y bosquejar los reales.
- (c) Hallar gráficamente:
- i) el rango de frecuencias en las cuales el sistema amplifica.
 - ii) la frecuencia a la cual v_o está en fase con v_i .
- (d) Corroborar los resultados de la parte (c) con la transferencia real.
- (e) Hallar aproximadamente la salida $v_o(t)$, cuando la entrada es:
- i) $v_i(t) = 100V \cos(\omega_0 t)$.
 - ii) $v_i(t) = 1V \sin\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right)$
 - iii) $v_i(t) = 0,01V \cos\left(\frac{\omega_0 t}{100} + \frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Problema 1

(a) Los polos de $H(j\omega)$ son las soluciones de $(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2 = 0$

$$\Rightarrow (j\omega) = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^4\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (\zeta^2 \leq 1) \quad -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Si definimos $z = \alpha + j\beta$ donde $\alpha = \zeta\omega_n$ y $\beta = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\Rightarrow (j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2 = (j\omega + z)(j\omega + \bar{z})$

(b) Si observamos la transferencia dada en (1), podemos observar que posee un cero en el origen, y polos complejos conjugados con amortiguamiento ζ y frecuencia natural ω_n .

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \tag{1}$$

A continuación, analizamos el Diagrama de Bode asintótico.

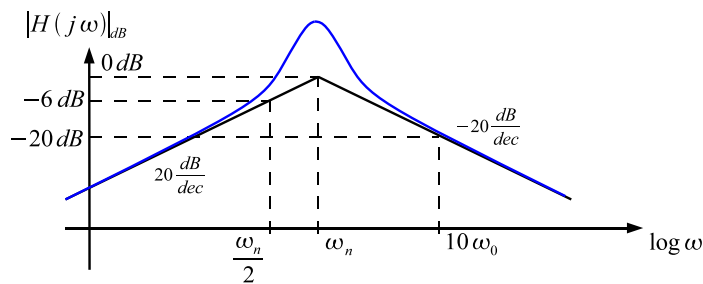
- Para $\omega \ll \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(\omega_n) + 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega \gg \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx \frac{-j\omega_n}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(\omega_n) - 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases} *$$

Obs*: el argumento de $H(j\omega)$ cuando $\omega \gg \omega_n$, puede ser $-\pi/2$ o $3\pi/2$, para saber cual de los dos valores posibles presenta efectivamente la transferencia, evaluamos en un punto intermedio por ejemplo $H(j\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}$ es decir el $\text{arg}(H(j\omega_n)) = 0 \Rightarrow$ descartamos el valor $3\pi/2$



En el caso en que $\zeta < 0$, el modulo de la transferencia no cambia ya que depende de ζ^2 , mientras que el diagrama de fase varía como se muestra en la Figura 7.

Figura 6: Diagrama de Bode (Amplitud)

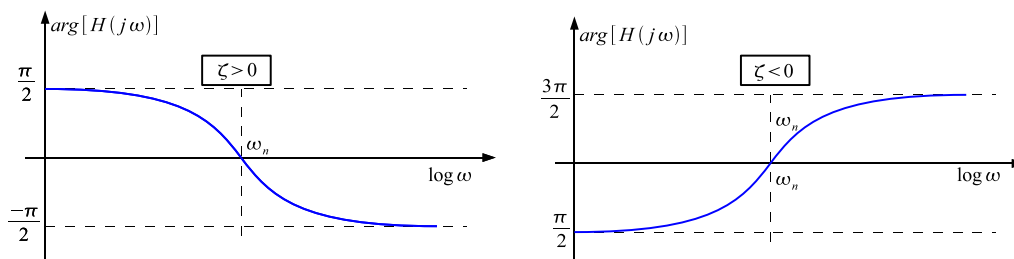


Figura 7: Diagramas para la fase en el caso en que $\zeta > 0$ y $\zeta < 0$.

(c) Imponiendo que $|H(j\omega_n)|_{dB} = 20 \text{ dB}$, obtenemos:

$$\Rightarrow |H(j\omega_n)| = 10 = \frac{1}{2\zeta_0} \Rightarrow \boxed{\zeta_0 = \frac{1}{20}}$$

(d) Evaluando la transferencia para las frecuencias deseadas, obtenemos:

$$H\left(j\frac{\omega_n}{2}\right) = \frac{j}{\frac{3}{2} + \frac{j}{10}} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\frac{\omega_n}{2})|_{real} = -3,54 \text{ dB} \\ \text{como } |H(j\frac{\omega_n}{2})|_{asin} = -6 \text{ dB} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_{\frac{\omega_n}{2}} = 2,45 \text{ dB}}$$

$$H(j\omega_n) = 20 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_n)|_{real} = 20 \text{ dB} \\ \text{como } |H(j\omega_n)|_{asin} = 0 \text{ dB} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_{\omega_n} = 20 \text{ dB}}$$

$$H(j10\omega_n) = \frac{10j}{-99 + j} \Rightarrow \begin{cases} |H(j10\omega_n)|_{real} = -19,71 \text{ dB} \\ \text{como } |H(j10\omega_n)|_{asin} = -20 \text{ dB} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_{10\omega_n} = 0,087 \text{ dB}}$$

Problema 2

(a) Para cualquiera de los dos esquemas de conexión de la carga se tiene que $P = 3|V'|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{z^*}\right\}$ donde V' es el voltaje de fase (en bornes de la carga). Para las cargas en estrella:

$$|V'| = |V_i| \Rightarrow P = 3|V_i|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{z^*}\right\}$$

Para las cargas en triángulo:

$$|V'| = \sqrt{3}|V_i| \Rightarrow P = 9|V_i|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{z^*}\right\}$$

Si queremos que la potencia activa consumida al sistema de fuentes sea mínima, conectamos las cargas en **estrella**. Sean $V_1 = V e^{j0}$, $V_2 = V e^{j\frac{2\pi}{3}}$ y $V_3 = V e^{j\frac{4\pi}{3}}$ los fasores asociados a las fuentes (en valores eficaces), entonces las corrientes de línea, resultan $I_i = \frac{V_i}{z}$, es decir:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2} \frac{V}{|z|} \cos(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) &= \sqrt{2} \frac{V}{|z|} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ i_3(t) &= \sqrt{2} \frac{V}{|z|} \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{aligned}$$

(b) i) La potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, será:

$$Q = 3 \text{Im}\{z\} |I_i|^2 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{3L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} V^2}$$

ii) La carga es inductiva, de modo que la compensación se realiza con un banco de condensadores conectados en paralelo a las cargas. Los condensadores se dimensionan de modo tal que entreguen la potencia reactiva consumida por las cargas a las fuentes. Si conectamos los condensadores en estrella, tenemos:

$$Q_C + Q_L = 0 \Rightarrow Q_C = -3C\omega V^2 \Rightarrow \boxed{C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}}$$

iii) Recordando el resultado de transfiguración estrella-triángulo: $Z_{est} = \frac{Z_{tri}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{tri}j\omega} = \frac{1}{3C_{est}j\omega} \Rightarrow C_{tri} = \frac{C_{est}}{3}.$$

Entonces para minimizar el valor de las componentes compensamos con un banco de condensadores en triángulo como se muestra en la Figura 8.

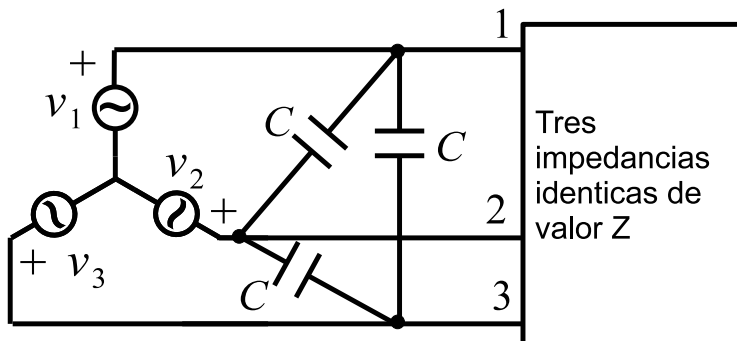


Figura 8: Esquema de conexión de los condensadores

iv) La potencia activa no cambia ya que al conectar en paralelo, el voltaje en bornes de las cargas no cambia. Además notar que el banco de condensadores no consume potencia activa.

$$\Rightarrow P = \frac{3R}{R^2 + L^2\omega^2} V^2$$

(c) Si observamos los equivalentes ilustrados en las Figuras 9 y 10, podemos concluir, que para

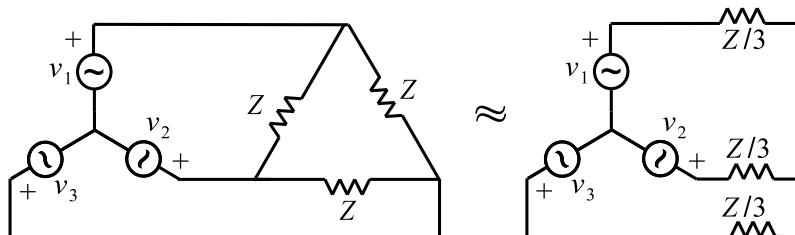


Figura 9:

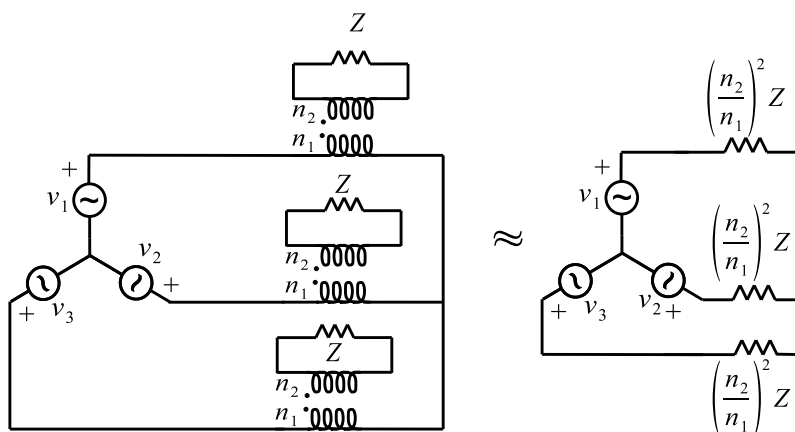


Figura 10:

tener impedancias idénticas vistas desde el sistema de fuentes, se debe verificar:

$$Z \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{Z}{3} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow n_2 \approx n_1 \cdot 1,73 \text{ por lo cual podemos elegir } \boxed{n_2 = 173 \quad n_1 = 100}$$

Problema 3

(a) Aplicando la definición de la transformada de Fourier, obtenemos:

$$\mathcal{F}[P_T(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \operatorname{sinc}(fT)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[P_T(t)](f) = T \operatorname{sinc}(fT)}$$

(b)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x T)}{\pi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[P_T(t)]_{(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[P_T(t)]_{(x)} e^{j2\pi x t} \Big|_{t=0} dx$$

$$\Rightarrow I = \bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[P_T(t)]_{(x)}](t=0) \Rightarrow \boxed{I = P_T(t=0) = 1 \text{ independientemente de } T}$$

(c) Tenemos que $x(t) = P_T(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, entonces,

$$X(f) = T \operatorname{sinc}(fT) * \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] \text{ donde llamamos } f_0 = \frac{1}{T}.$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{T}{2} [\operatorname{sinc}((f - f_0)T) + \operatorname{sinc}((f + f_0)T)]$$

En las Figura 11 se ilustra el espectro de la señal $x(t)$.

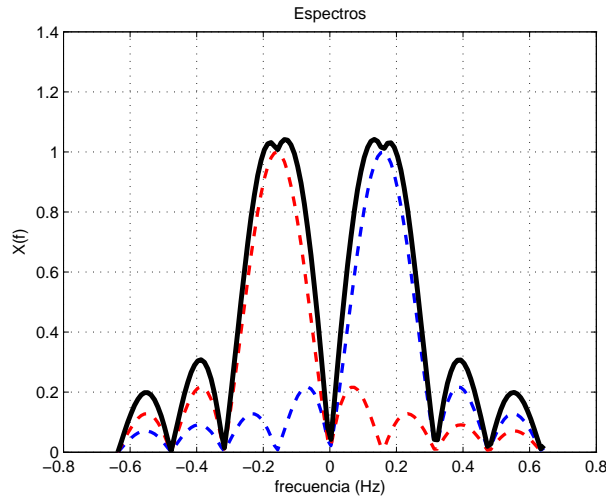


Figura 11: Espectro de $x(t)$

Tras los respectivos filtrados pasabajos, se obtienen las señales $r_1(t)$ y $r_2(t)$ cuyos espectros se bosquejan en la Figura 12.

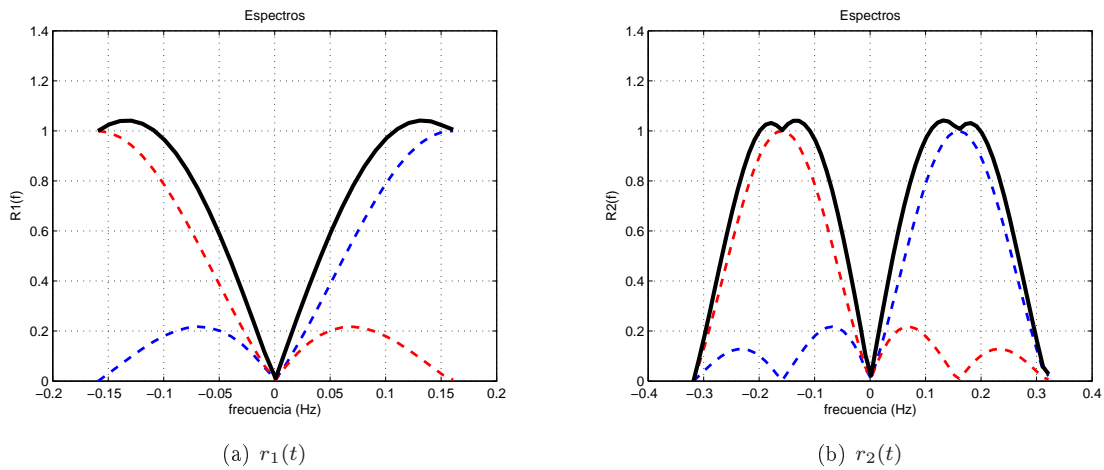


Figura 12:

Utilizando el teorema de Parseval, sabemos que la energía de la señal corresponde:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |r_i(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_i(f)|^2 df$$

Es claro que $r_2(t)$ tiene mayor energía que $r_1(t)$ ya que el área de bajo la curva de su espectro es mayor.

Problema 4

(a) De los divisores de tensión, obtenemos:

$$V_1 = -\frac{V_i}{2}$$

$$V' = -\frac{9999Lj\omega + R}{R} V_o$$

Planteando la ecuación de nudos, tenemos:

$$\frac{V_i - V'}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} + \frac{200}{R} V_1 = \frac{V_o}{R}$$

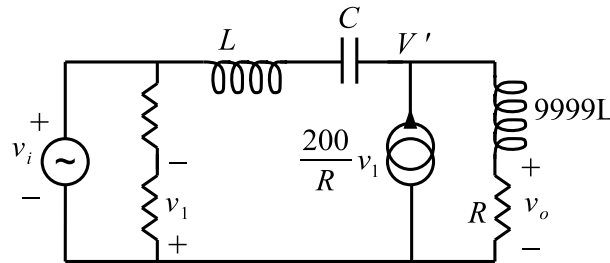


Figura 13:

Eliminando V_1 y V' ,

$$\Rightarrow V_i RCj\omega - (9999Lj\omega + R)Cj\omega V_o = (LC(j\omega)^2 + 1)V_o + 100(LC(j\omega)^2 + 1)V_i$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = -\frac{1}{100} \frac{(j\omega)^2 - \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{100}(j\omega) + \frac{\omega_0^2}{10000}}$$

Si $\frac{L}{R} = \frac{1}{100\omega_0}$, $RC = \frac{100}{\omega_0}$, $\Rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_0^2$

$$\Rightarrow H(j\omega) = -\frac{1}{100} \frac{(j\omega)^2 - \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{100}(j\omega) + \frac{\omega_0^2}{10000}} \tag{2}$$

(b) Si analizamos al transferencia hallada en (2), podemos ver que posee ceros complejos conjugados con $\omega_n = \omega_0$ y $\zeta = \frac{1}{2}$, y polos también complejos conjugados con $\omega_n = \frac{\omega_0}{100}$ u $\zeta = \frac{1}{2}$.

- Para $\omega \ll \frac{\omega_0}{100}$,

$$H(j\omega) \approx -100 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 40 \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx \pi \end{cases}$$

- Para $\frac{\omega_0}{100} \ll \omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{100} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{\omega_0^2}{100}\right) - 40 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx 0 \text{ ó } 2\pi, \\ \text{evaluando } H\left(j\frac{\omega_0}{100}\right) \approx j100 = 100 \angle \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Arg}(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -40 \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx \pi \text{ ó } -\pi, \\ \text{evaluando } H(j\omega_0) \approx -\frac{j}{100} = \frac{1}{100} \angle \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\pi \end{cases}$$

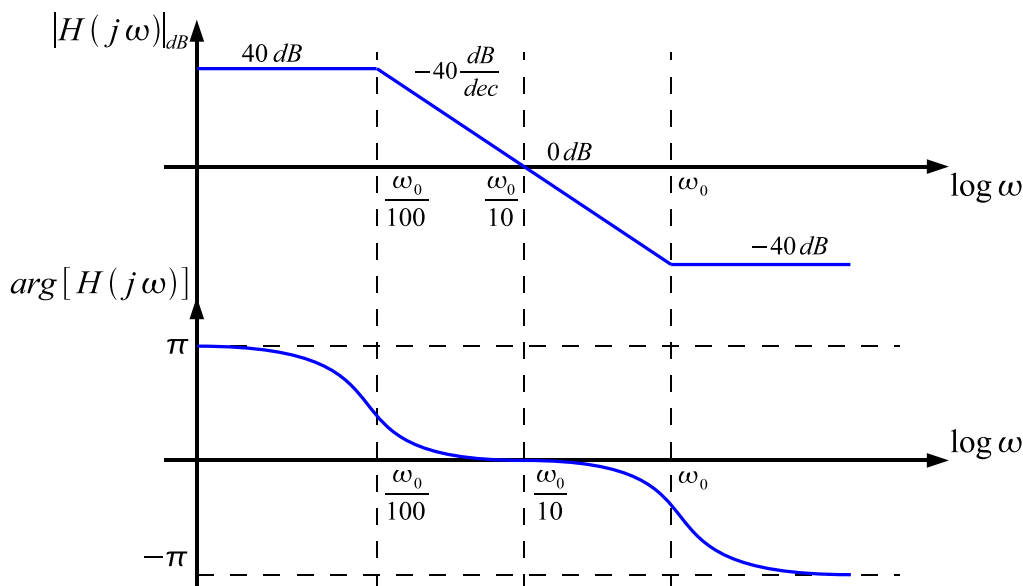


Figura 14: Diagrama de Bode para $H(j\omega)$

- (c) i) Si observamos el Diagrama de Bode mostrado en la Figura 14, podemos ver que la ganancia a baja frecuencia es de 40 dB , luego presenta una caída a -40 dB . La ganancia es de 0 dB una década por encima de $\frac{\omega_0}{100} \Rightarrow$ la banda de amplificación es $\left(0, \frac{\omega_0}{10}\right)$
- ii) Del diagrama de bode, y por la simetría que presenta la transferencia ($\zeta = \frac{1}{2}$ en el numerador y en el denominador), se tiene que $\text{arg}\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = 0 \Rightarrow v_o$ estará en fase con v_i si la frecuencia de la entrada es $\frac{\omega_0}{10}$.
- (d) Para corroborar los resultados de la parte anterior, simplemente evaluamos la transferencia calculada en $\frac{\omega_0}{10}$:

$$H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = -\frac{1}{100} \frac{-\frac{\omega_0^2}{100} - j\frac{\omega_0^2}{10} + \omega_0^2}{-\frac{\omega_0^2}{100} - j\frac{\omega_0^2}{1000} + \frac{\omega_0^2}{10000}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)|_{dB} = 0 \\ \text{arg}\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = 0 \end{cases}$$

(e) Evaluando la transferencia para las distintas frecuencias, obtenemos las respectivas salidas:

$$\text{i) } H(j\omega_0) \approx \frac{1}{100} \angle -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = 1V \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ii) } H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = 1$$

$$\Rightarrow v_o(t) = 1V \cos\left(\frac{\omega_0}{10} t\right)$$

$$\text{iii) } H\left(j\frac{\omega_0}{100}\right) \approx 100 \angle \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = -1V \cos\left(\frac{\omega_0}{100} t\right)$$