

Sistemas Lineales 1

Segundo parcial, julio 2004

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (14 puntos)

- (a) Consideremos la transferencia de primer orden $H_C(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{a}}{1 + j\frac{\omega}{k.a}}$, siendo a y k constantes positivas con $k > 1$.
- i) Hallar analíticamente la frecuencia a la cual es máxima la fase de $H_C(j\omega)$. Expresarla en función de a y k .
 - ii) Hallar k para que dicha fase sea de 60 grados.

- (b) Consideremos ahora la transferencia

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \text{ con } \zeta = 0,5; \omega_n > 0.$$

- i) Dibujar los respectivos Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.
 - ii) Verificar analíticamente que a la frecuencia $\omega_0 = \omega_n \frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}}$ el sistema introduce un adelanto de 30 grados.
- (c) ¿A partir de lo visto en las partes anteriores, cómo haría para obtener un sistema que a una entrada $e(t) = \cos(\omega_0 t)$ responda en régimen con una señal en cuadratura?

Problema 2 (18 puntos)

- (a) En una planta industrial, interesa alimentar una carga trifásica que se muestra en la Figura 1, de la cual se dispone únicamente de sus tres bornes accesibles. Para obtener un modelo eléctrico de la misma, se decide realizarle un ensayo alimentándola con un sistema trifásico de fuentes en estrella de valor eficaz 380V, midiéndose la potencia activa y reactiva que consume.
- i) Suponiendo que la carga se encuentra en las hipótesis del teorema de Blondell y que se dispone de dos vatímetros, indique mediante un esquema un posible conexionado de los mismos para medir la potencia activa en el ensayo. Justifique claramente los fundamentos de su método de medida.
 - ii) Hallar un modelo para la carga, como tres impedancias idénticas Z en estrella, sabiendo que del ensayo se obtuvo $P = 3752W$ y $Q = 2166Var$.

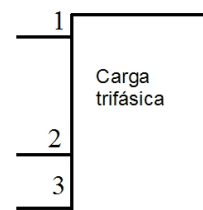


Figura 1: Carga

Nota: Se recuerda la definición de potencia aparente $S = \sum_{j=1}^3 V_j \bar{I}_j$ donde V_j y I_j son las respectivas tensiones y corrientes de fase.

- (b) La misma carga se alimenta mediante la instalación de la Figura 2, donde el sistema de fuentes es perfecto. Mostrar que es equivalente al circuito trifásico de la Figura 3, para Z_{eq} que se hallará en función de n (relación de transformación de los transformadores ideales) y Z . **Justificar.**

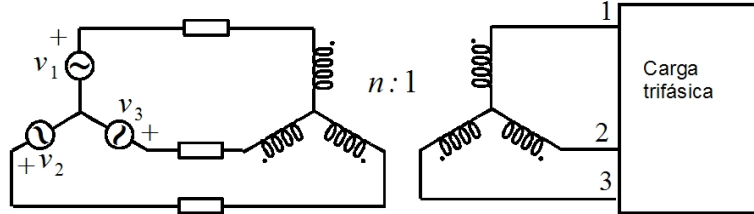


Figura 2:

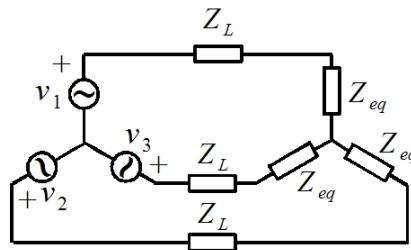


Figura 3:

- (c) Trabajando con el equivalente de la Figura 3 donde:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \sqrt{2} 500V \sin(\omega t) & \omega &= 100\pi \frac{rad}{s} & n &= \frac{500}{380} \\ v_2(t) &= \sqrt{2} 500V \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & Z_L &= R + Lj\omega \\ v_3(t) &= \sqrt{2} 500V \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) & R &= 10\Omega & L &= 2H \end{aligned}$$

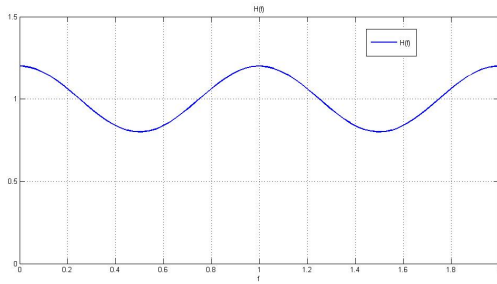
- I) Hallar los fasores I_1, I_2, I_3 correspondientes a las corrientes de línea. Representarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores V_1, V_2, V_3 del sistema de fuentes.
 - II) Obtener las expresiones temporales, $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$.
 - III) Calcular las potencias activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes.
 - IV) Calcular la fracción en porcentaje de la potencia activa total entregada que se pierde en las líneas (disipada en R).
 - V) Calcular la potencia activa consumida por las carga.
- (d) Compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes, sin modificar la potencia activa que entregan. Para ello indicar que componentes colocaría, sus valores y como realizaría el conexionado de los mismos.

Problema 3

- (a) Deducir una expresión de $\mathcal{F}[\delta(t - t_0)]$ y $\bar{\mathcal{F}}[\delta(t - t_0)]$.
- (b) Deducir la identidad $\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$. Hallar $\mathcal{F}\left[\cos\left(2\pi \frac{t}{t_d}\right)\right]$.

Se considera un sistema lineal, cuya transferencia $H(f)$ presenta las siguientes características:

- El modulo presenta ondulaciones como las indicadas en la Figura 4:



$$|H(j\omega)| = 1 + a \cos\left(2\pi \frac{f}{f_d}\right)$$

$$a < 1$$

$$t_d = \frac{1}{f_d}$$

Figura 4: Módulo de la transferencia

- La fase es: $Arg(H(f)) = -t_0 2\pi f$
- (c) Indicar si el sistema produce alguno de los siguientes tipos de distorsión:
 - I) Amplitud
 - II) Fase
 - III) Intermodulación
- (d) Se aplica una entrada $x(t)$, con transformada de Fourier $X(f)$.

- I) Hallar la transformada de Fourier $Y(f)$ de la salida.
- II) Deducir la expresión de la salida $y(t)$.
- III) Mostrar en un esquema de $y(t)$ la presencia de "ecos". Suponer $x(t)$ como en la Figura 5.
- IV) ¿Qué relación deben cumplir t_d y t_0 si el sistema es causal?

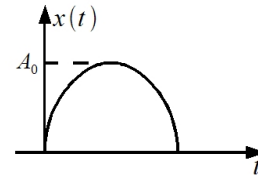


Figura 5: Entrada

Nota: se dice que un sistema lineal es causal, si para toda entrada $x(t)$ que cumple $x(t) = 0$ para $t < 0$, la salida $y(t)$ cumple que $y(t) = 0$ para $t < 0$.

Problema 4

- (a) En el circuito de la Figura 6, calcular la impedancia vista Z_v , en función de A y Z .

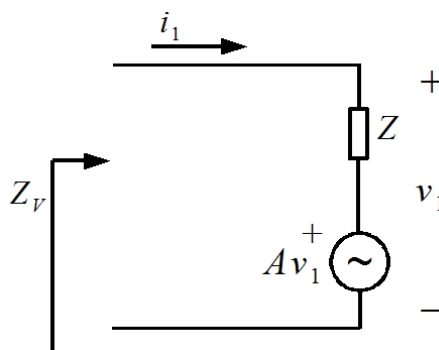


Figura 6:

- (b) En el circuito de la Figura 7, calcular la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$
- (c) Realizar el diagrama asintótico de Bode de $H(j\omega)$ y bosquejar el real, dando la ubicación aproximada del real en los puntos notables, considerar las siguientes relaciones:

$$\frac{L}{R} = RC = \frac{1}{\omega_0}$$

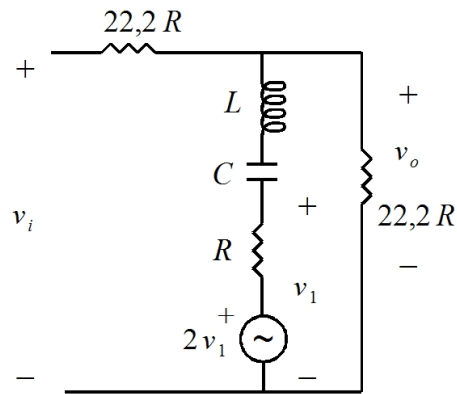


Figura 7:

(d) Basado en el diagrama de Bode real con las correcciones en los puntos notables, determinar la salida en régimen del circuito de la parte anterior, cuando la entrada es:

- I) $v_i(t) = 1V \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right)$
- II) $v_i(t) = 1V \cdot \cos(\omega_0 t)$
- III) $v_i(t) = 1V \cdot \cos(10\omega_0 t)$

Solución

Problema 1

- (a) i) Tenemos la función de transferencia,

$$H_c(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{a}}{1 + j\frac{\omega}{ak}}, \text{ donde } a > 0, k > 1$$

Buscamos la frecuencia, para la cual se maximiza la fase de dicha transferencia, podemos reescribir $H_c(j\omega)$ como:

$$H_c(j\omega) = \frac{(1 + j\frac{\omega}{a})(1 - j\frac{\omega}{ak})}{1 + (\frac{\omega}{ak})^2} = \frac{1 + (\frac{\omega}{a})^2 \frac{1}{k} + j\frac{\omega}{a} \frac{k-1}{k}}{1 + (\frac{\omega}{ak})^2} \quad (1)$$

Observando la ecuación (1), podemos observar que la fase de la transferencia, coincide con la fase del numerador, ya que el denominador es un número real positivo $\forall \omega$. El problema se reduce a maximizar la fase del numerador.

$$\text{Arg}(H_c(j\omega)) = \text{Arctg} \left(\frac{\frac{\omega}{a} \frac{k-1}{k}}{1 + (\frac{\omega}{a})^2 \frac{1}{k}} \right) \quad (2)$$

Como la Arctg es monótona creciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, podemos maximizar la función dada en (2) maximizando:

$$f(\omega) = \left(\frac{\frac{\omega}{a} \frac{k-1}{k}}{1 + (\frac{\omega}{a})^2 \frac{1}{k}} \right) \Rightarrow \frac{df}{d\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{max} = a\sqrt{k}}$$

- ii) Imponemos que $\text{Arg}(H_c(j\omega_{max})) = 60^\circ$, es decir,

$$\tan(60) = \sqrt{3} = \frac{\frac{k-1}{\sqrt{k}}}{1 + 1} \Rightarrow \boxed{k = 4\sqrt{3} + 7}$$

- (b) i) Consideremos $H(j\omega)$ de la forma:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n \cdot (j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \text{ donde } \zeta = 0,5, \omega_n > 0 \quad (3)$$

Como $\zeta < 1$ el denominador, tiene raíces complejas conjugadas. Podemos observar el comportamiento de la transferencia, para los distintos rangos en los que varía la frecuencia, obteniendo:

- Para $\omega \ll \omega_n$,

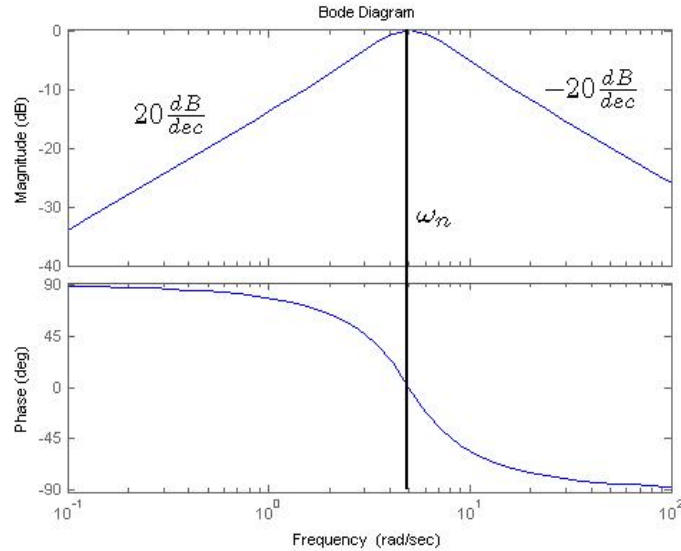
$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} c|H(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(\omega_n) + 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega \gg \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_n}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} c|H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(\omega_n) - 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como se puede observar en el diagrama de bode^(a), para $\omega = \omega_n$ la transferencia vale 1, es decir, $|H(j\omega_n)| = 0 \text{ dB}$ y $\text{arg}(H(j\omega_n)) = 0$.

^(a)y verificar analíticamente



- ii) Recordando que $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$, para z_1 y z_2 dos complejos no nulos. Escribimos el $\arg(H(j\omega))$ como:

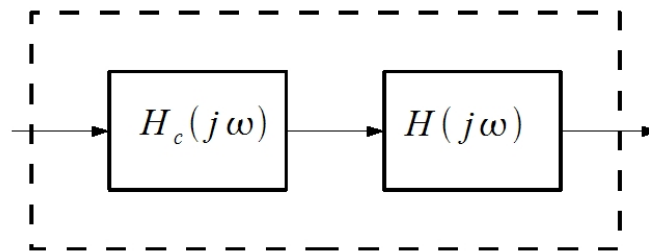
$$\arg(H(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arg\left((j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (4)$$

Finalmente evaluando $\omega_0 = \omega_n \cdot \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}}\right)$ obtenemos:

$$\arg(j\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\arg(j\omega_0) = 30^\circ}$$

- (c) Buscamos implementar un sistema, tal que para la frecuencia ω_0 , la entrada y la salida se encuentren en cuadratura^(b). Utilizando las partes anteriores, podemos utilizar el sistema de la parte b, $H(j\omega)$, para introducir un adelanto de 30° . Luego, con el sistema de la parte a, $H_c(j\omega)$, podemos introducir un adelanto adicional de 60° en la fase, fijando $\omega_{max} = \omega_0$. Como $k = 4\sqrt{3}+7$ y $\omega_{max} = a\sqrt{k}$ debemos fijar $a = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\sqrt{3}+7}}$, para obtener la transferencia deseada.

Luego solo resta introducir ambos sistemas en serie, de modo que la función de transferencia total será $H(j\omega) \cdot H_c(j\omega)$, y la fase total queda $\arg(H_c(j\omega)) + \arg(H(j\omega)) = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$



Problema 2

- (a) 1) Para medir la potencia consumida por la carga, podemos utilizar el teorema de Blondell. Sabemos que las cargas verifican las hipótesis del teorema^(c), por lo tanto $P =$

^(b)es decir, la entrada y la salida, tengan una diferencia de fase de 90° .

^(c)la condición necesaria para aplicar el teorema de Blondell, es que si las cargas están en estrella, no exista conexión de neutro entre las cargas y las fuentes.

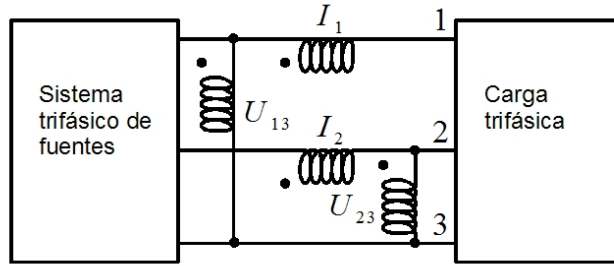


Figura 8: Esquema de conexión de los vatímetros

$\sum_{j=1}^3 Re [U_{jx} \bar{I}_j]$ donde U_{jx} es la tensión entre la línea j y un punto de referencia cualquiera x y \bar{I}_j es la corriente en la línea j . Eligiendo x convenientemente, en una de las líneas, por ejemplo $x = 3$, simplificamos el calculo anterior, pues uno de los términos se anula trivialmente. Finalmente tenemos:

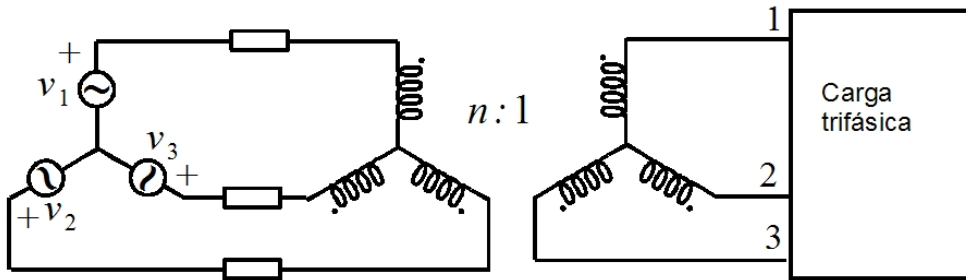
$$P = Re[U_{13} \bar{I}_1] + Re[U_{23} \bar{I}_2] \tag{5}$$

Podemos medir las cantidades anteriores, con tan solo dos vatímetros, conectados como se muestra en la figura 8.

- ii) Buscamos un modelo para las cargas, formado por tres impedancias idénticas Z en estrella, que consuman $P = 3752W$ y $Q = 2166Var$.

$$Z = |Z|\angle\varphi \text{ Donde } \begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{Q}{P} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \\ |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ Recordemos que } |S| = 3|V_{eff}| |I_{eff}| = 3 \frac{|V|^2}{|Z|} \\ \Rightarrow |Z| = \frac{3|V|^2}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \Rightarrow |Z| = 100\Omega \end{cases}$$

$$Z = (50\sqrt{3} + j50)\Omega = 100\Omega\angle 30^\circ$$



- (b) En primer lugar, sustituimos en el circuito de la figura , las cargas trifásicas por sus modelo equivalente calculado en la parte anterior. Luego, observamos el equivalente monofásico, como se ilustra en la figura 9, donde calculando la impedancia vista Z_v obtenemos $Z_v = n^2 Z$. Finalmente el circuito trifásico equivalente se muestra en la figura 10, donde $Z_{eq} = n^2 Z$

- (c) i) Trabajando con el circuito equivalente, tenemos:

$$I_i = \frac{V_i}{Z_L + Z} \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ con } V_1 = 500V\angle 0^\circ, V_2 = 500V\angle 120^\circ, V_3 = 500V\angle 240^\circ \tag{6}$$

Luego sustituyendo los parámetros por sus valores dados en la letra, obtenemos:

$$I_1 = (0,149 - 0,666j)A = 0,683A\angle -77^\circ \Rightarrow \begin{matrix} I_1 = 0,683A\angle -77^\circ \\ I_2 = 0,683A\angle -77^\circ + 120^\circ \\ I_3 = 0,683A\angle -77^\circ + 240^\circ \end{matrix} \tag{7}$$

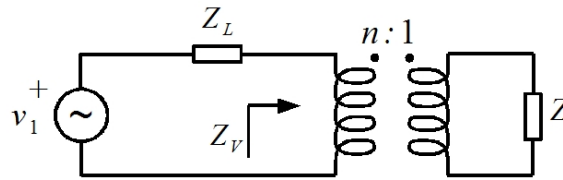


Figura 9: Equivalente monofásico

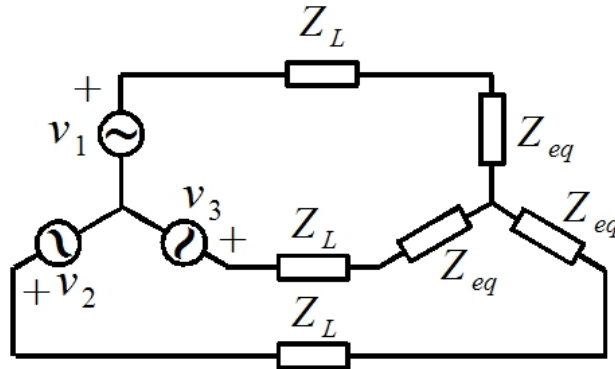


Figura 10: Circuito equivalente

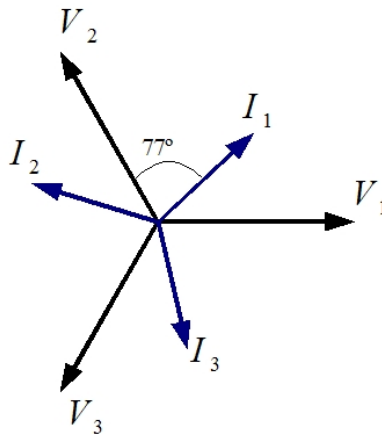


Figura 11: Diagrama fasorial

ii) Evaluando las expresiones de la parte anterior, tenemos:

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}0,683A \operatorname{sen}(\omega t - 1,35) \\ i_2(t) = \sqrt{2}0,683A \operatorname{sen}(\omega t - 1,35 + \frac{2\pi}{3}) \\ i_3(t) = \sqrt{2}0,683A \operatorname{sen}(\omega t - 1,35 + \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (8)$$

iii) De las partes anteriores, tenemos los fasores de tensión y corriente. Calculamos la potencia activa y reactiva consumidas a las fuentes como:

$$P = 3\operatorname{Re}[V \bar{I}] \Rightarrow \boxed{P = 223W}$$

$$Q = 3\operatorname{Im}[V \bar{I}] \Rightarrow \boxed{Q = 1000Var}$$

iv) Calculando la potencia disipada en las líneas, obtenemos, $P_{perdida} = 3R|I|^2 = 13,9W$, el porcentaje de potencia disipada en las líneas con respecto a la potencia activa total queda:

$$\frac{P_{perdida}}{P} \cdot 100\% = 6,25\%$$

- v) Conocemos la potencia entregada por las fuentes, y la potencia que se disipa en las líneas; podemos calcular la potencia consumida por las cargas simplemente como la diferencia.

$$P = P_{perdida} + P_{carga} \Rightarrow \boxed{P_{carga} = 209,5W}$$

- (d) Para compensar la potencia reactiva, sin afectar la potencia activa consumida por las cargas, colocamos un banco de condensadores, en estrella y en paralelo con las cargas. Calculamos el valor de los condensadores, de modo que la potencia reactiva total sea nula.

$$Q + Q_C = 0 \Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V|^2} \Rightarrow \boxed{C = 4,2\mu F}$$

El esquema de conexión se muestra en la figura 12.

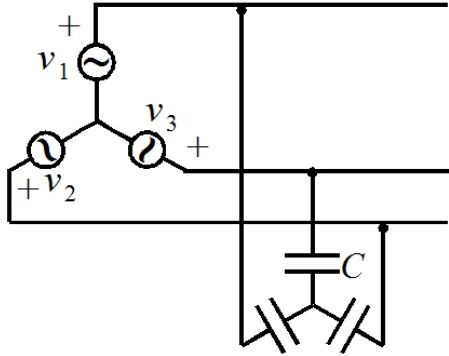


Figura 12: Conexión de los condensadores

Problema 3

- (a) Como la distribución $\delta(t - t_0)$ es de soporte acotado, podemos calcular su transformada de Fourier, como:

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = \langle \delta(t - t_0), e^{-j2\pi ft} \rangle = e^{-2\pi ft_0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-2\pi ft_0}}$$

Análogamente,

$$\bar{\mathcal{F}}[\delta(t - t_0)] = \langle \delta(t - t_0), e^{j2\pi ft} \rangle = e^{2\pi ft_0} \Rightarrow \boxed{\bar{\mathcal{F}}[\delta(t - t_0)] = e^{2\pi ft_0}}$$

- (b) De la parte anterior, sabemos que

$$\bar{\mathcal{F}}[\delta(f - f_0)] = e^{j2\pi f_0 t}, \text{ entonces: } \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \mathcal{F}[\bar{\mathcal{F}}[\delta(f - f_0)]] = \delta(f - f_0) \quad (9)$$

De forma análoga, se demuestra que:

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0) \quad (10)$$

Por ultimo, para realizar la transformada de de Fourier de $\cos(2\pi f_0 t)$ (donde hemos llamado $f_0 = \frac{1}{T_d}$), podemos escribir el coseno como combinación de exponenciales complejas, y utilizando las ecuaciones (9) y (10) obtener su transformada.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \stackrel{(d)}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}]) \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}} \end{aligned}$$

^(d)en este paso se esta utilizando que la transformada de Fourier es una operación lineal.

- (c) En primer lugar, recordemos que dado un sistema lineal causal e invariante en el tiempo, decimos que no produce distorsión, si la salida, corresponde a la entrada con a lo sumo un cambio en su amplitud y un retardo, es decir, $r(t) = k \cdot e(t-t_0)$ con $t_0 > 0$ y $k > 0$. La condición anterior, se traduce en frecuencia, en una respuesta plana en el modulo ($|H(f)| = k$) y fase lineal con pendiente negativa ($Arg(H(f)) = -2\pi t_0 f$)
- I) Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se puede observar que el sistema presenta distorsión en amplitud, pues el modulo de la transferencia no es constante.
 - II) El sistema no presenta distorsión en fase, pues la fase se comporta de manera lineal con la frecuencia con pendiente negativa.
 - III) Finalmente el sistema no presentara intermodulación por tratarse de un *sistema lineal*.
- (d) I) Si aplicamos a la entrada una señal $x(t)$ con espectro $X(f)$, a la salida, obtenemos:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = X(f) \left[1 + a \cos \left(2\pi \frac{f}{f_d} \right) \right] e^{-j2\pi f t_0} \quad (11)$$

- II) Utilizando la ecuación (11) obtenemos $Y(f)$, antitransformando, podemos calcular $y(t)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) e^{-j2\pi f t_0} + a X(f) e^{-j2\pi f t_0} \cos \left(2\pi \frac{f}{f_d} \right) \\ \Rightarrow y(t) &= x(t) * \mathcal{F}^{-1} [e^{-j2\pi f t_0}] + a(x(t) * \mathcal{F}^{-1} [e^{-j2\pi f t_0}]) * \mathcal{F}^{-1} \left[\cos \left(2\pi \frac{f}{f_d} \right) \right] \\ &\Rightarrow y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) + a x(t) * \delta(t - t_0) * \left[\frac{\delta(t - t_d) + \delta(t + t_d)}{2} \right] \\ &\Rightarrow \boxed{y(t) = x(t - t_0) + a \left[\frac{x(t - t_0 - t_d) + x(t - t_0 + t_d)}{2} \right]} \end{aligned}$$

- III) Suponiendo que la señal de entrada tiene la forma ilustrada en la figura 13 y utilizando la parte anterior, podemos realizar un bosquejo de la señal de salida, mostrado en la figura 14, donde se visualiza claramente la presencia de ecos. Es decir, la señal se "escuchara" 3 veces, dos de las cuales tendrán menos intensidad.

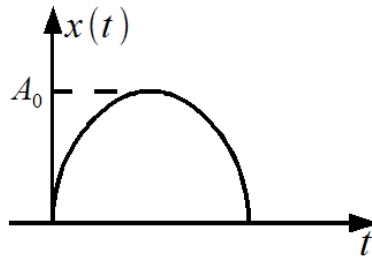


Figura 13: Señal de entrada

- IV) A partir del esquema de la parte anterior, observamos que para que el sistema sea causal, se debe cumplir que $t_0 - t_d \geq 0$, pues no puede existir componentes de la salida para tiempos menores que cero, ya que para ese tiempo no había efectos de la entrada $\Rightarrow \boxed{t_0 \geq t_d}$.

Otra manera de obtener el resultado anterior, es utilizar que las funciones de transferencia de los sistemas causales, tiene soporte en $[0, +\infty)$. Como $h(t) = \delta(t - t_0) + \frac{a}{2} [\delta(t - t_0 - t_d) + \delta(t - t_0 + t_d)]$, para que el soporte se encuentre en $[0, +\infty)$ tenemos $\boxed{t_0 - t_d \geq 0}$.

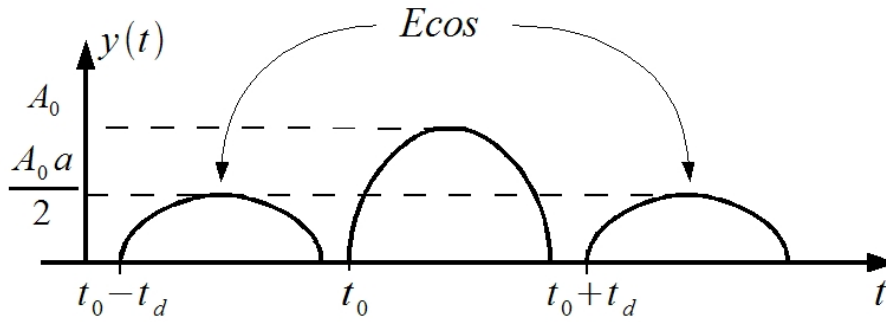
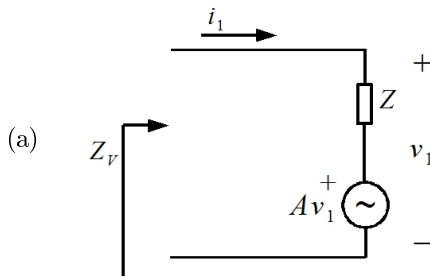


Figura 14: Señal de salida

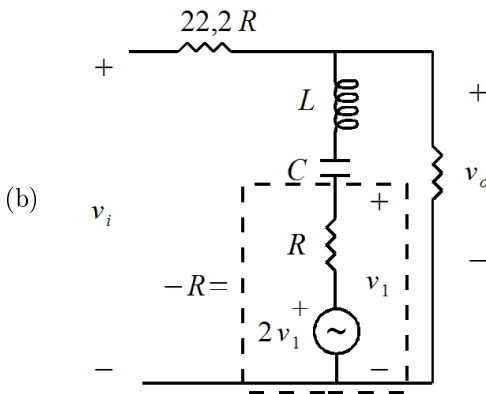
Problema 4



La impedancia vista será:

$$Z_v = \frac{V_{in}}{i_{in}} = \frac{V_1}{i_1}, \text{ luego } I_1 = \frac{V_1 - AV_1}{Z} = \frac{(1-A)V_1}{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{Z}{1-A}}$$



Planteando las ecuaciones de nudos, obtenemos:

$$\frac{v_i - v_o}{22,2R} = \frac{v_o - v_1}{Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{v_o}{22,2R}$$

$$\frac{v_o - v_1}{Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{v_1}{-R} \Rightarrow v_o = v_1 \left(1 - \frac{LC(j\omega)^2 + 1}{RCj\omega} \right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{RC(j\omega) \cdot v_o}{-LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) - 1}$$

$$\Rightarrow -\frac{v_1}{R} = \frac{C(j\omega)v_o}{LC(j\omega)^2 - RC(j\omega) + 1}$$

$$\Rightarrow v_i = v_o \left(2 + \frac{22,2RC(j\omega)}{LC(j\omega)^2 - RC(j\omega) + 1} \right) = v_o \left(\frac{2LC(j\omega)^2 + 20,2RC(j\omega) + 2}{LC(j\omega)^2 - RC(j\omega) + 1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{(j\omega)^2 - \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + 10,1\frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}} \quad (12)$$

- (c) Consideramos las siguiente relaciones entre los parámetros del sistema, $\frac{L}{R} = RC = \frac{1}{\omega_0}$. Considerando las relaciones anteriores, reescribimos la función de transferencia hallada en (12), obteniendo:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{(j\omega)^2 - \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + 10,1\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{(j\omega)^2 - \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega + \frac{1}{10}\omega_0)(j\omega + 10\omega_0)} \quad (13)$$

Los ceros de la función de transferencia, son complejos conjugados, con $\zeta = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = \omega_0$. Estudiamos la función de transferencia para los distintos valores de ω .

- Para $\omega \ll \frac{\omega_0}{10}$

$$\Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(2) \approx -6dB \\ \arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\frac{\omega_0}{10} \ll \omega \ll \omega_0$

$$\Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{20j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{\omega_0}{20}\right) - 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0$

$$\Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{20\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log(20\omega_0) + 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \approx -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $10\omega_0 \ll \omega$

$$\Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -6 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \approx -2\pi \end{cases}$$

Por ultimo, antes de pasar al bosquejo del diagrama de bode real y asintótico, calculemos el valor exacto para el modulo y la fase de la transferencia, en los puntos notables.

$$H(j\omega_0) = -\frac{1}{2} \frac{j\omega_0^2}{\omega_0^2 \left(\frac{1}{10} + j\right) (10 + j)} \approx -\frac{1}{20} = -26 \text{ dB} \angle -\pi$$

$$H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) \approx \frac{1}{2(1+j)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle -\frac{\pi}{4} = -9 \text{ dB} \angle -\frac{\pi}{4}$$

$$H(j10\omega_0) \approx -\frac{1}{2(1+j)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle -\frac{7\pi}{4} = -9 \text{ dB} \angle -\frac{7\pi}{4}$$

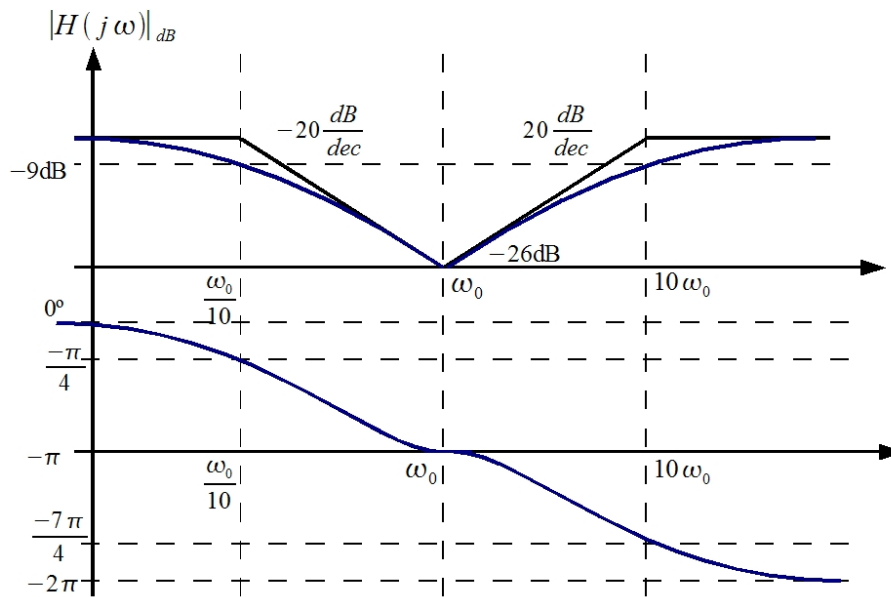


Figura 15: Diagrama de bode real y asintótico

- (d) Con los cálculos realizados en la parte anterior, podemos calcular la salida ante las distintas entradas propuestas.

$$v_i(t) = 1V \cos\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right) \Rightarrow v_0(t) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} V \cos\left(\frac{\omega_0 t}{10} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$v_i(t) = 1V \cos(\omega_0 t) \Rightarrow v_0(t) \approx \frac{1}{20} V \cos(\omega_0 t - \pi)$$

$$v_i(t) = 1V \cos(10\omega_0 t) \Rightarrow v_0(t) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} V \cos\left(10\omega_0 t - \frac{7\pi}{4}\right)$$