

Sistemas Lineales 1

Segundo parcial

1^{er} semestre 2018

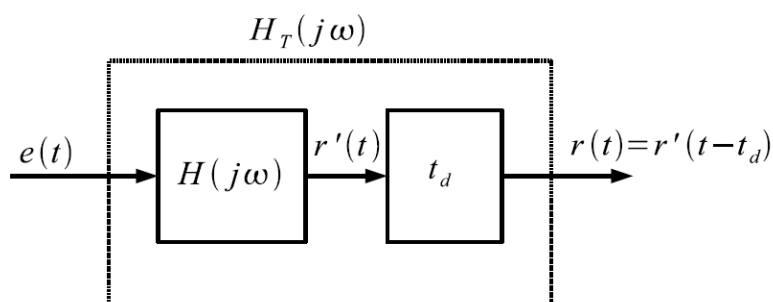
Recomendaciones generales:

- Lea atentamente todos los ejercicios y asegúrese de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambie a otro y vuelva a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la asignatura. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HAGA PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONGA EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1 (12 puntos) Se considera la transferencia en régimen sinusoidal

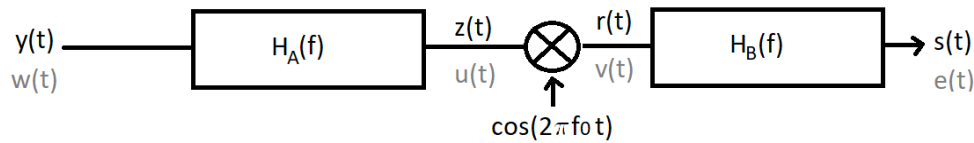
$$H(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^2}{(j\omega - 0.1)(j\omega + 10)}$$

- Hallar los valores de $K \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |H(j\omega)| = 40db$.
- Determinar K si además se sabe que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg [H(j\omega)] = 0^\circ$
- Bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de módulos y fase de $H(j\omega)$, **justificando detalladamente** los pasos seguidos para su obtención.
- Calcular las distancias entre el diagrama de módulo real y el asintótico para las siguientes frecuencias $0.1rad/s$, $1rad/s$ y $10rad/s$.
- Se coloca el sistema anterior en cascada con un retardo de valor $t_d > 0$, como se muestra en la figura. ¿Cómo se relacionan los módulos de las transferencias $H(j\omega)$ y $H_T(j\omega)$? **Justificar!!!**



Problema 2 (17 puntos)

Se tiene la señal $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + w(t)$, que consiste en una modulación AM de la señal $x(t)$ y una interfe-



rencia aditiva $w(t)$. Se busca recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$ mediante el sistema demodulador de la figura, compuesto por el filtro pasabanda $H_A(f)$, el filtro pasabajos $H_B(f)$ a diseñar, y el multiplicador por $\cos(2\pi f_0 t)$.

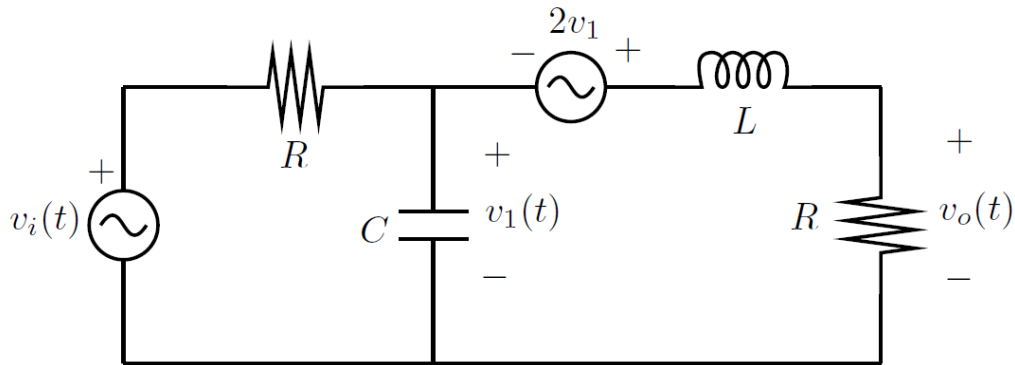
De $x(t)$ se sabe que es una señal real de ancho de banda $B_X < f_0/2$, mientras que de la señal de interferencia $w(t)$ se conoce que su transformada de Fourier $W(f) = \mathcal{F}[w(t)] = C$ es constante. Los filtros se describen a continuación.

$$H_A(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f - f_0| \leq B_X \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad H_B(f) = \begin{cases} K_B & \text{si } |f| \leq B \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- Graficar un posible espectro para $x(t)$ y el correspondiente el espectro de $y(t)$.
- En esta parte se considera el caso sin interferencia ($C = 0$).** Graficando los espectros de las señales $z(t)$, $r(t)$ y $s(t)$ (indicados en la figura), hallar el ancho de banda B y la ganancia K_B del filtro pasabajos para obtener $s(t) = x(t)$.
- A partir de ahora se considera el caso general ($C \neq 0$)** y el filtro pasabajos diseñado. Se define $e(t) = s(t) - x(t)$ como el error de reconstrucción. Mostrar que $e(t)$ coincide con la salida del demodulador cuando la entrada es $w(t)$ (ver figura).
- Graficar el espectro de $e(t)$ y hallar su energía.

Problema 3 (15 puntos)

Se considera el sistema de la figura.



- Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, observando que resulta ser real racional estrictamente propia, de orden 2 en el denominador y orden 0 en el numerador.
- Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0 > 0$ y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando detalladamente el proceso de obtención de los mismos.
- Hallar los valores reales de $H(j\omega)$ en ω_0 y $2\omega_0$. Expresarlos en coordenadas polares.
- Hallar una frecuencia de trabajo a la cual la salida en régimen sinusoidal se encuentra retrasada 45° respecto de la entrada.

Problema 4 (16 puntos)

En el circuito en fasores de la figura, un sistema de fuentes V_1 , V_2 y V_3 alimenta un sistema de cargas con dos fases iguales entre sí (R_1 en serie con L_1) y una fase alimentada por medio de un transformador **ideal** con n vueltas en el primario y m vueltas en el secundario.

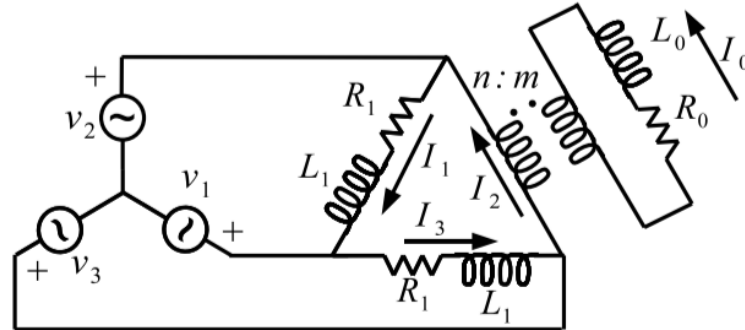


Figura 1:

- ¿Qué relación tiene que cumplir R_1 y L_1 , en función de R_0 , L_0 , n y m , para que el sistema de cargas que ven las fuentes sea equilibrado?
- Si $R_1 = 100\Omega$, $L_1 = \frac{100}{2\pi f} \text{Hy}$, $n = 100$, $m = 10$ y $f = 50\text{Hz}$. Calcular el valor de R_0 y L_0 para que sea un sistema de cargas equilibrado.

Para el sistema de fuentes:

$$v_1(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi ft) \quad , \quad v_2(t) = 220\sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad v_3(t) = 220\sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{4\pi}{3}\right)$$

- Calcular los fasores asociados a las corrientes I_1 , I_2 , I_3 e I_0 y ubicarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores de las fuentes.
- Dar las expresiones temporales de las corrientes I_1 , I_2 , I_3 e I_0 .
- Calcular la potencia reactiva entregada por las fuentes.
- Se quiere compensar la potencia reactiva. Calcular e indicar claramente qué elementos colocaría y cómo los conectaría, teniendo en cuenta que la compensación se quiere realizar en los bornes de las impedancias de carga.

Solución

Problema 1

Se trabajará con la transferencia:

$$H(j\omega) = K \frac{(j\omega)^2}{(j\omega - 0.1)(j\omega + 10)}$$

- a) Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow H(j\omega) \approx K \Rightarrow \boxed{K = \pm 100}$ para obtener una ganancia de $40dB$ en alta frecuencia.
- b) Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K\omega^2 \Rightarrow \boxed{K = 100}$ para que el argumento sea de $0rad$ en baja frecuencia.
- c) Para la construcción de los diagramas de Bode, observemos que la transferencia presenta un singularidad doble en el origen en el numerador y dos polos singularidades en el denominador, en $\frac{1}{10}rad/s$ y $-10rad/s$.

- Para $\omega \ll \frac{1}{10}$,

$$H(j\omega) \approx 100\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 40 + 40 \log(\omega) \text{ dB} \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \text{ rad} \end{cases}$$

- Para $\frac{1}{10} \ll \omega \ll 10$,

$$H(j\omega) \approx 10(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 + 20 \log(\omega) \text{ dB} \\ Arg(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $10 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx 100 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 40 \text{ dB} \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \text{ rad} \end{cases}$$

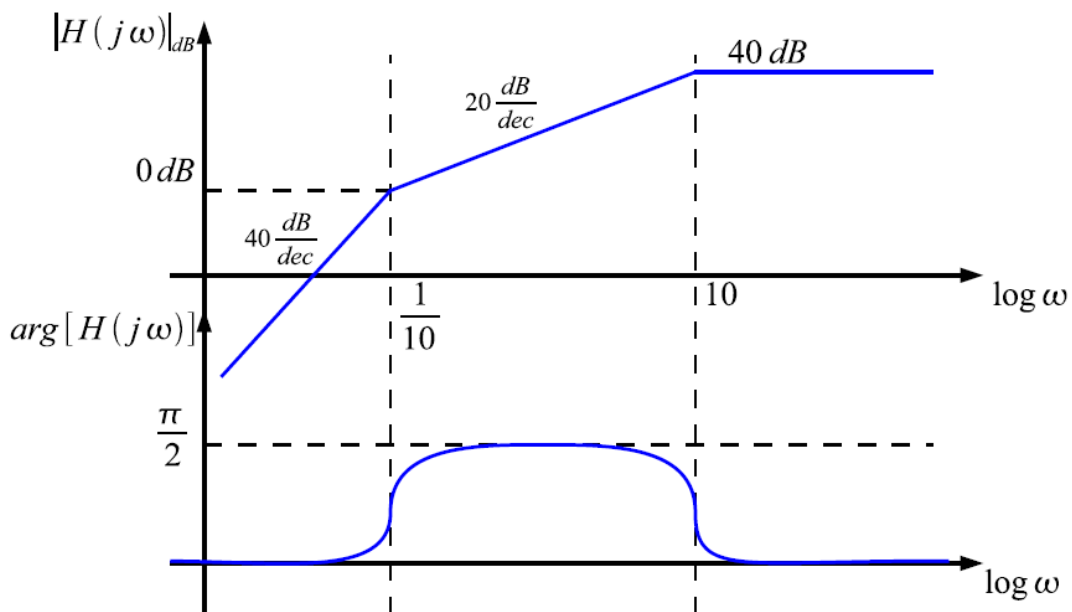


Figura 2: Diagrama de Bode

- d) Calculemos ahora la distancia entre los valores dados por el diagrama asintótico y los valores reales toma la transferencia para las distintas frecuencias dadas en la letra.

- Para $\omega = \frac{1}{10} \text{ rad/s}$

$$\left. \begin{array}{l} |H(j\frac{1}{10})|_{asin} = 0 \text{ dB} \\ |H(j\frac{1}{10})|_{real} = -3,0107 \text{ dB} \end{array} \right\} \Rightarrow Dist = \left| H\left(j\frac{1}{10}\right) \right|_{asin} - \left| H\left(j\frac{1}{10}\right) \right|_{real} \Rightarrow \boxed{Dist = 3,0107 \text{ dB}}$$

- Para $\omega = 1 \text{ rad/s}$, nos encontramos una década por encima de $\frac{1}{10}$. Si consideramos el diagrama asintótico, tendremos un incremento de 20 dB respecto del valor en $\frac{1}{10}$, y por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} |H(j1)|_{asim} = 20 \text{ dB} \\ |H(j1)|_{real} = 19,914 \text{ dB} \end{array} \right\} \Rightarrow Dist = |H(j1)|_{asim} - |H(j1)|_{real} \Rightarrow \boxed{Dist = 0,086 \text{ dB}}$$

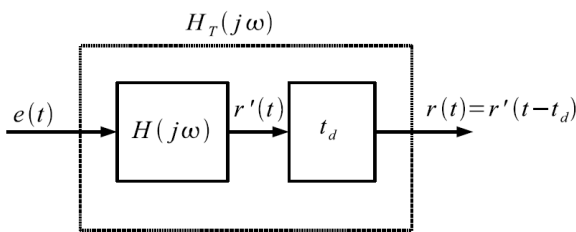
- Para $\omega = 10 \text{ rad/s}$ tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} |H(j10)|_{asim} = 40 \text{ dB} \\ |H(j10)|_{real} = 36,9893 \text{ dB} \end{array} \right\} \Rightarrow Dist = |H(j10)|_{asim} - |H(j10)|_{real} \Rightarrow \boxed{Dist = 3,0107 \text{ dB}}$$

- Para $\omega = 100 \text{ rad/s}$ tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} |H(j100)|_{asim} = 40 \text{ dB} \\ |H(j100)|_{real} = 39,9568 \text{ dB} \end{array} \right\} \Rightarrow Dist = |H(j100)|_{asim} - |H(j100)|_{real} \Rightarrow \boxed{Dist = 0,0432 \text{ dB}}$$

- e) Analizamos la transferencia de las partes anteriores, en cascada con un sistema que únicamente introduce un retardo.



La respuesta al impulso de un retardo, es $h_{t_d}(t) = \delta(t - t_d)$ ya que $r(t) = r'(t - t_d)$. Por otro lado sabemos que la respuesta impulsiva de un sistema en cascada, es la convolución de ambas respuestas impulsivas, es decir, $h_T(t) = h(t) * h_{t_d}(t)$. En frecuencia, $H_T(j\omega) = H(j\omega) \cdot \mathcal{F}[\delta(t - t_d)] = H(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_d}$.

Finalmente como $|e^{-j\omega t_d}| = 1$ tenemos que,

$$\boxed{|H_T(j\omega)| = |H(j\omega)|}$$

y los diagramas de Bode de módulo son idénticos.

Problema 2

- a) El espectro de $x(t)$, al que llamaremos $X(f)$ debe ser simétrico por ser $x(t)$ real (su transformada de Fourier es simétrica conjugada), y tener soporte en $|f| \leq B_X$. Un posible ejemplo se muestra en la figura 3. El correspondiente espectro de $Y(f)$ será

$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + W(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) + W(f)$$

Aquí se usó que la transformada de Fourier es lineal y cambia producto por convolución, que la transformada del coseno es una suma de dos deltas y que convolucionar por una delta equivale a una traslación.

De lo anterior resulta el espectro $Y(f)$ que también se muestra en la figura 3

- b) El filtro pasabanda no tiene efecto sobre la señal cuando $C = 0$, ya que deja pasar las frecuencias donde $Y(f) \neq 0$. Por ende $Z(f) = Y(f)$. Luego $R(f)$ cumple

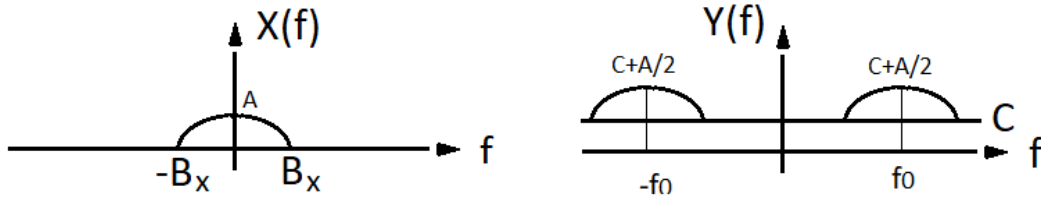


Figura 3: Espectros de $x(t)$ e $y(t)$

$$\begin{aligned}
 R(f) &= Z(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
 &= Y(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
 &= X(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
 &= X(f) * \frac{1}{4}(\delta(f - 2f_0) + 2\delta(f) + \delta(f + 2f_0)) \\
 &= \frac{1}{4}(X(f + 2f_0) + 2X(f) + X(f - 2f_0)) \\
 &= \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}(X(f + 2f_0) + X(f - 2f_0))
 \end{aligned}$$

Entonces $Z(f)$ y $R(f)$ toman la forma que se muestra en la figura 4.

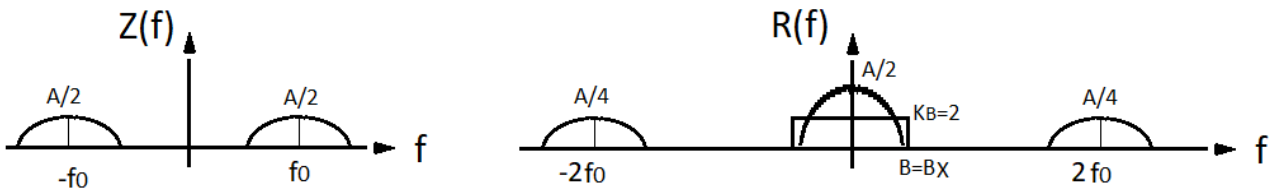


Figura 4: Espectros de $x(t)$ e $y(t)$

El filtro pasabajos debe diseñarse para filtrar las copias $X(f + 2f_0)$ y $X(f - 2f_0)$ que están centradas en $f = 2f_0$ y $f = -2f_0$. Para ello sirve cualquier valor $B \in [B_x, 2f_0 - B_x]$, por ejemplo $B = B_x$. Además se necesita $K_B = 2$ para duplicar la amplitud de la copia centrada en $f = 0$. Para estos valores de B , y K_B se recupera $S(f) = X(f)$, y por ende $s(t) = x(t)$.

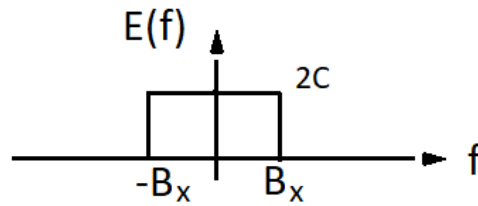
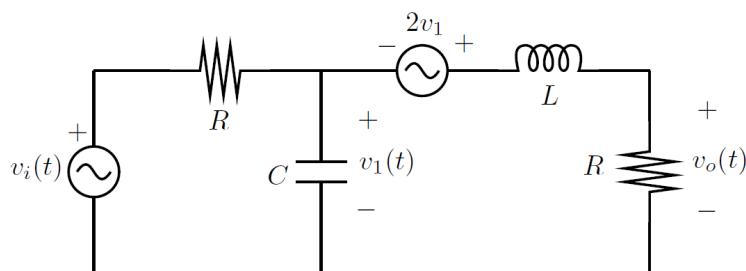
- c) Es demodulador es lineal, en el sentido de que si la entrada al filtro pasabanda es una señal $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, entonces la salida del pasabajos será $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ donde $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son las salidas correspondientes a $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente. En particular, si $y_1(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$, entonces $s_1(t) = x(t)$ según se mostró en la parte b). Por otro lado $e(t)$ se define como la salida del demodulador cuando la entrada es $w(t)$ es decir que si $y_2(t) = w(t)$ entonces $s_2(t) = e(t)$. Luego para

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + w(t)$$

la salida es $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = x(t) + e(t)$. De ello se desprende que $e(t) = s(t) - x(t)$.

- d) El espectro de $e(t)$, al que llamaremos $E(f)$ es el que se muestra en la figura 5. Usando la identidad de Parseval la potencia de $e(t)$ puede calcularse en función de $E(f)$ según

$$P_e = \int E^2(f)df = 8C^2 B_x$$

Figura 5: Espectro de $e(t)$ **Problema 3**

a) Consideremos el circuito en fasores y planteemos el nudo de tensión V_1 :

$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 C j\omega + \frac{V_o}{R} \Rightarrow \frac{V_i}{R} = V_1 \left(\frac{1}{R} + C j\omega \right) + \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_i = V_1 (1 + RC j\omega) + V_o$$

Por otro lado, la Ley de Kirchoff para la segunda malla nos dice que

$$V_1 = -2V_1 + L j\omega \cdot \frac{V_o}{R} + V_o \Rightarrow$$

$$\frac{3V_1}{L j\omega + R} = \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_1 = \frac{(L j\omega + R)}{3R} V_o$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, resulta

$$V_i = V_o \frac{(L j\omega + R)}{3R} (1 + RC j\omega) + V_o = V_o \left(1 + \frac{(1 + RC j\omega)(L j\omega + R)}{3R} \right) \Rightarrow$$

$$V_i = V_o \left(\frac{3R + R + L j\omega + R^2 C j\omega + RLC(j\omega)^2}{3R} \right) \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{3R}{4R + (L + R^2 C)(j\omega) + RLC(j\omega)^2} = \frac{\frac{3}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)(j\omega) + \frac{4}{LC}}$$

b) Para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, entonces $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ y tenemos que

$$H(j\omega) = \frac{3\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\omega_0(j\omega) + 4\omega_0^2}$$

Observemos que H tiene orden 2 en el denominador y orden 0 en el numerador. Calculemos las raíces del polinomio asociado al denominador

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Entonces tenemos dos raíces complejas conjugadas $(-1 \pm j\sqrt{3})\omega_0$, de módulo $2\omega_0$ y un valor de $\zeta = \frac{1}{2}$. La discusión de la aproximación asintótica de los Diagramas de Bode debe hacerse discutiendo según el módulo de las raíces ($2\omega_0$). Esta frecuencia separa las bajas de las altas frecuencias.

$$\omega \ll 2\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3\omega_0^2}{4\omega_0^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|(db) &= 20 \log(\frac{3}{4}) \\ \arg(H(j\omega)) &= 0(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

$$\omega \gg 2\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3\omega_0^2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|(db) &= 20 \log(3\omega_0^2) - 40 \log(\omega) \\ \arg(H(j\omega)) &= \pm \pi(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

Para discriminar si la variación es de $+\pi$ o $-\pi$, calculamos $H(j\omega)$ en $\omega = 2\omega_0$:

$$H(j2\omega_0) = \frac{3\omega_0^2}{(j2\omega_0)^2 + 2\omega_0(j2\omega_0) + 4\omega_0^2} = \frac{3\omega_0^2}{-4\omega_0^2 + j4\omega_0^2 + 4\omega_0^2} = \frac{3\omega_0^2}{j4\omega_0^2} = \frac{3}{j4}$$

Vemos que la respectiva fase es de $-\frac{\pi}{2}$, por lo que tenemos un retraso de fase hacia $-\pi$. Los Diagramas de Bode reales se muestran en la figura 6. Las asíntotas de alta y baja frecuencia del Diagrama de módulo son, respectivamente, una recta horizontal a $20 \log(3/4)db$ y una recta a $-40db/dec$. Las asíntotas de alta y baja frecuencia del Diagrama de fase son, respectivamente, rectas horizontales a 0° y -180° . Observamos que la fase es continua entre ambas asíntotas.

c) Calculemos los valores pedidos.

$$H(j\omega_0) = \frac{3\omega_0^2}{(j\omega_0)^2 + 2\omega_0(j\omega_0) + 4\omega_0^2} = \frac{3}{-1 + 2j + 4} = \frac{3}{3 + 2j} \approx 0,83 \angle -34^\circ$$

$$H(j2\omega_0) = \frac{3\omega_0^2}{(j2\omega_0)^2 + 2\omega_0(j2\omega_0) + 4\omega_0^2} = \frac{3}{-4 + 4j + 4} = \frac{3}{4j} = \frac{3}{4} \angle -90^\circ$$

d) Para encontrar una frecuencia de trabajo a la cual el sistema introduzca un retardo de 45° , tenemos que tener presente que para una entrada sinusoidal pura $A \cdot \cos(\omega_1 t)$, el sistema responde en régimen con otra sinusoidal pura de la forma

$$A \cdot |H(j\omega_1)| \cdot \cos(\omega_1 t + \arg(H(j\omega_1)))$$

Entonces, debemos encontrar ω_1 tal que $\arg(H(j\omega_1)) = -45^\circ$ ($6 + 315^\circ$). Para hacerlo, introducimos dos variables auxiliares positivas α y k tales que $H(j\alpha \cdot \omega_0) = k \cdot (1 - j)$, con $\omega_1 = \alpha \cdot \omega_0$. Desarrollemos este camino:

$$H(j\alpha \cdot \omega_0) = \frac{3\omega_0^2}{(j\alpha \cdot \omega_0)^2 + 2\omega_0(j\alpha \cdot \omega_0) + 4\omega_0^2} = \frac{3}{-\alpha^2 + 2j\alpha + 4} = k(1 - j)$$

Operando, obtenemos dos ecuaciones para α y k .

$$3 = k(1 - j)(4 - \alpha^2 + 2j\alpha) = k(4 - \alpha^2 + 2\alpha) + jk(-4 + \alpha^2 + 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 &= -4 + \alpha^2 + 2\alpha \\ 3 &= k(4 - \alpha^2 + 2\alpha) \end{cases}$$

De donde

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Nos quedamos con la raíz positiva $\alpha = -1 + \sqrt{5} \approx 1,24$. Esto es consistente con lo que muestra el diagrama de Bode y con la fase de $H(j2\omega_0)$. El respectivo valor de k sale de observar que $2\alpha = 4 - \alpha^2$, de donde

$$3 = k(4 - \alpha^2 + 2\alpha) = k(4 - \alpha^2 + 4 - \alpha^2) = k(8 - 2\alpha^2) \Rightarrow k = \frac{3}{8 - 2\alpha^2} \approx 0,61$$

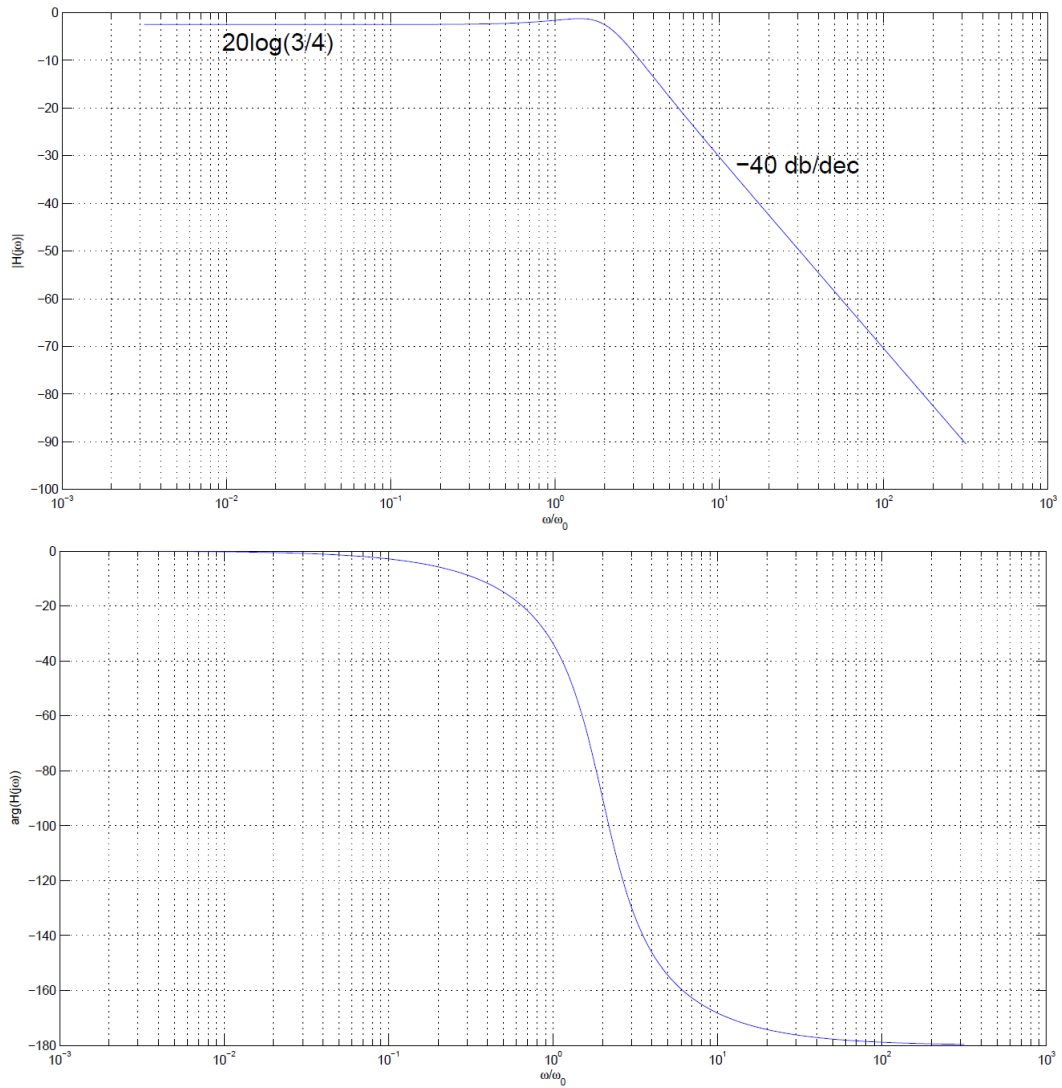
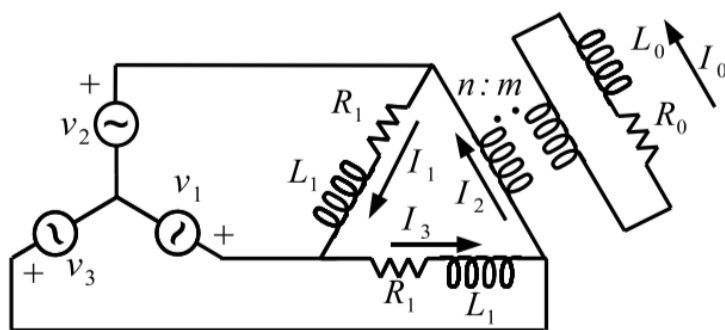


Figura 6: Diagramas de Bode reales y asintóticos del Problema 1.

Problema 4

a) Para que el sistema de cargas sea equilibrado, la impedancia vista desde el primario del transformador debe ser igual a $R_1 + L_1 j\omega$. Sabemos que $Z_v = \left(\frac{n}{m}\right)^2 [R_0 + L_0 j\omega]$, entonces obtenemos,



$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= 220 \sqrt{2} \cos(2\pi ft) \\
 v_2(t) &= 220 \sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 v_3(t) &= 220 \sqrt{2} \cos\left(2\pi ft + \frac{4\pi}{3}\right) \\
 R_1 &= 100\Omega, \quad L_1 = \frac{100}{2\pi f} \text{Hy}, \\
 n &= 100, \quad m = 10 \text{ y } f = 50\text{Hz}
 \end{aligned}$$

Figura 7:

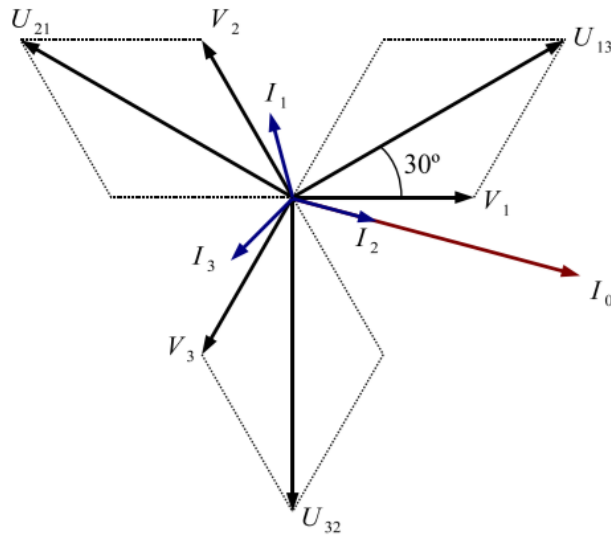
$$\Rightarrow R_1 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 R_0, \quad L_1 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 L_0$$

b) A partir de las relaciones de la parte anterior, y los valores dados para los distintos componentes obtenemos,

$$R_0 = 1\Omega, \quad L_0 = \frac{1}{2\pi f} \text{Hy}$$

c) Calculamos las siguiente tensiones compuestas: U_{21} , U_{13} y U_{32}

Utilizando las ecuaciones () y (), y las tensiones compuestas calculadas, obtenemos los fasores para las co-



$$\text{Si } \begin{cases} V_1 = 220V \angle 0^\circ \\ V_2 = 220V \angle 120^\circ \\ V_3 = 220V \angle 240^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{21} = 220\sqrt{3}V \angle 150^\circ \\ U_{13} = 220\sqrt{3}V \angle 30^\circ \\ U_{32} = 220\sqrt{3}V \angle 270^\circ \end{cases}$$

De las relaciones del transformador ideal:

$$-\frac{n}{m}I_2 + I_0 = 0 \Rightarrow I_0 = 10I_2$$

Por último,

$$Z_1 = (R_1 + jL_1\omega) = 100\sqrt{2}\Omega \angle 45^\circ$$

Figura 8:

rientes presentes en el circuito.

En la figura 8, se ilustra el diagrama fasorial, mostrando las cantidades calculadas.

$$I_1 = \frac{U_{21}}{Z_1} \Rightarrow I_1 = 2,2\sqrt{\frac{3}{2}} A \angle 105^\circ$$

$$I_2 = \frac{U_{13}}{Z_1} \Rightarrow I_2 = 2,2\sqrt{\frac{3}{2}} A \angle 345^\circ$$

$$I_0 = 10I_2 \Rightarrow I_0 = 22\sqrt{\frac{3}{2}} A \angle 345^\circ$$

$$I_3 = \frac{U_{32}}{Z_1} \Rightarrow I_3 = 2,2\sqrt{\frac{3}{2}} A \angle 225^\circ$$

d) Con los fasores calculados en la parte anterior, podemos obtener fácilmente las expresiones temporales de las corrientes.

$$i_1(t) = 2,2\sqrt{3} A \cos(2\pi ft + 105^\circ)$$

$$i_2(t) = 2,2\sqrt{3} A \cos(2\pi ft + 345^\circ)$$

$$i_3(t) = 2,2\sqrt{3} A \cos(2\pi ft + 225^\circ)$$

$$i_0(t) = 22\sqrt{3} A \cos(2\pi ft + 345^\circ)$$

e) La potencia reactiva consumida por cada fase es: $Q_{fase} = L_1\omega |I|^2 = 726 \text{Var}$, la potencia reactiva total entregada por las fuentes será: $Q_{tri} = 3Q_{fase} \Rightarrow Q_{tri} = 2178 \text{Var}$

f) Como las cargas son inductivas, debo compensar con condensadores en bornes de las cargas. Para las dos fases que presentan igual impedancia Z_1 , tenemos:

$$Q_C + Q_{fase} = 0 \Rightarrow -C\omega |V_c|^2 - Q_{fase} = 0 \Rightarrow C = \frac{Q_{fase}}{|V_C|^2 \omega} \Rightarrow C = \frac{726}{|220\sqrt{3}|^2 \omega}$$

$$\Rightarrow C = 15,9\mu F$$

Para la fase que tiene el transformador, el procedimiento es análogo, teniendo en cuenta la tensión presente en bornes del secundario, es decir,

$$Q_{C'} + Q_{fase} = 0 \Rightarrow C' = \frac{Q_{fase}}{|V'_{C'}|^2 \omega} \text{ donde } |V'_{C'}| = \left(\frac{m}{n}\right) |V_C|$$

$$\Rightarrow C' = \frac{726 \cdot 100}{|220\sqrt{3}|^2 \omega} \Rightarrow C' = 1,59mF$$

El esquema de conexión se muestra en la figura 9.

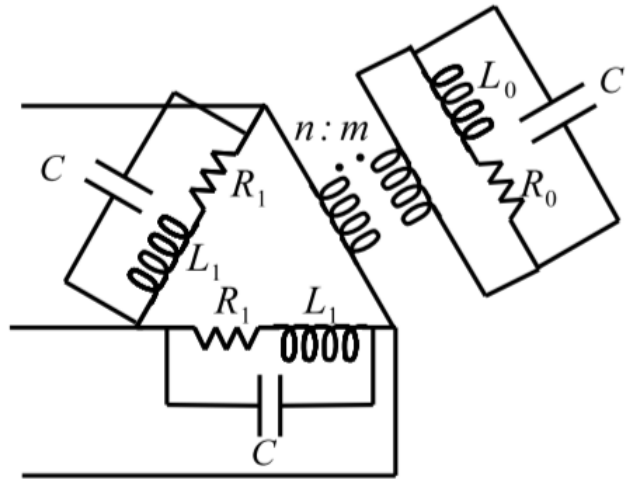


Figura 9: Esquema de conexión