Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2018

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (9 puntos)

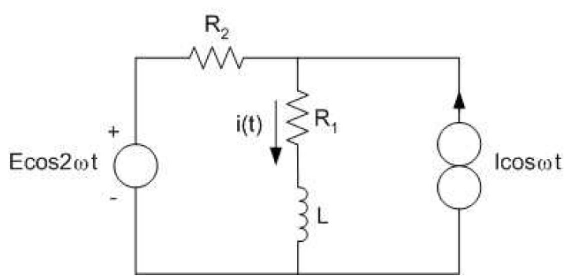
Sea el circuito de la figura, funcionando en régimen periódico.

a) Hallar la corriente $i(t)$ y la tensión en bornes de R_1 en régimen, expresadas como funciones del tiempo.

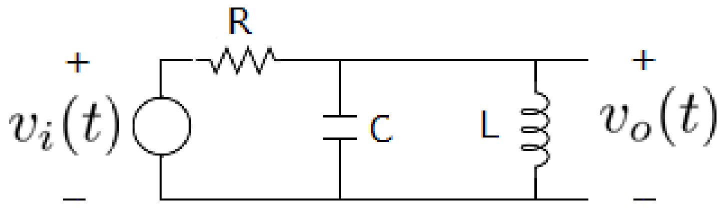
b) Calcular la potencia instantánea $p(t)$ en R_1.

c) Mostrar que dicha potencia consta de términos constantes y términos periódicos, cuya frecuencia se determinará (recordar que $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$).

d) Deducir el valor medio de dicha potencia (potencia activa en R_1).



Problema 2 (11 puntos)



a) Obtenga una ecuación diferencial que vincule $v_i'(t)$ (derivada de $v_i(t)$) con $v_o(t)$ y sus derivadas, donde $v_i(t)$ y $v_o(t)$ son los voltajes de entrada y salida en el circuito de la figura.

b) Suponiendo L y R conocidos, y definiendo $\tau = \frac{1}{2}.\frac{L}{R}$, determinar el valor de C para que se verifique

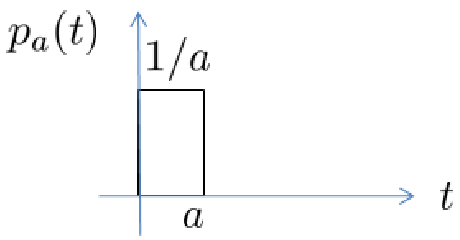
$$2\tau\delta' * v_i = (\delta + 2\tau\delta' + \tau^2\delta'') * v_o = D\delta * v_o$$

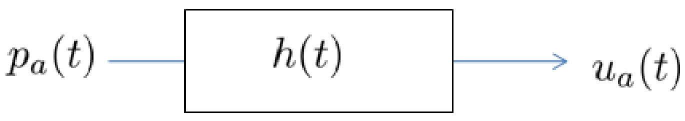
c) Halle $S(t) = (D\delta)^{-1}$ tal que $S * (\delta + 2\tau\delta' + \tau^2\delta'') = \delta$.

d) A partir del resultado anterior obtenga $h(t)$ tal que $v_o = h * v_i$

e) A partir de la parte b), muestre que si la entrada es el escalón $v_i(t) = Y(t)$ entonces $v_o(t) = 2\tau S(t)$, donde $S(t)$ es la obtenida en la parte c).

f) A partir de lo anterior, obtenga la salida $u_a(t) = v_o(t)$ cuando la entrada es el pulso $v_i(t) = p_a(t)$ de la figura.





Sugerencia: observar que $p_a(t) = \frac{1}{a}[(Y(t) - Y(t-a)]$.

g) Determine el límite $\bar{u}(t) = \lim_{a\to 0} u_a(t)$, cuando el ancho a del pulso de entrada $p_a(t)$ tiende a cero y su altura tiende a infinito. Justifique.

h) Analice la compatibilidad de lo hallado en la partes anteriores con el comportamiento del condensador y la bobina en régimen de continua.

Problema 3 (11 puntos)

A la izquierda de la figura se muestra un modelo simplificado de un motor de inducción monofásico (sistema electromecánico) operando en régimen sinusoidal. La potencia disipada en R representa la potencia mecánica entregada a la carga más pérdidas rotacionales de vacío (fricción en rodamientos, histéresis, etc.). El campo inducido por la inductancia L es el que magnetiza el circuito magnético del motor, y se mantiene constante.

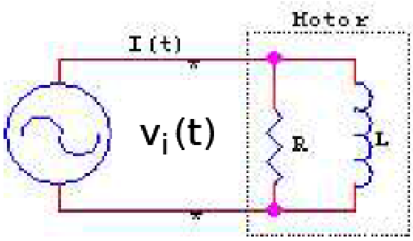
Los datos del modelo son: $v_i(t) = 311V\sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$.

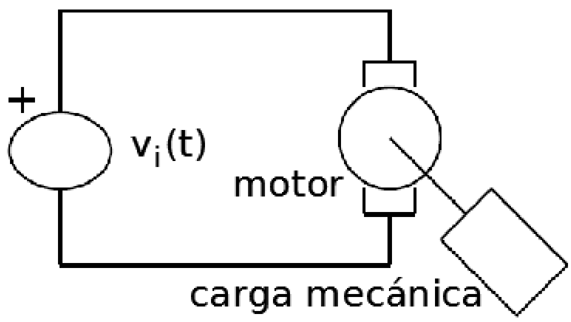
Se pide:

a) Bosquejar un diagrama fasorial tensión-corriente. Incluir las tensiones y corrientes de todos los elementos del circuito.

b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

c) Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular el valor del condensador para compensar la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.





Problema 4 (9 puntos)

En la figura 1 se muestra una onda cuadrada asimétrica.

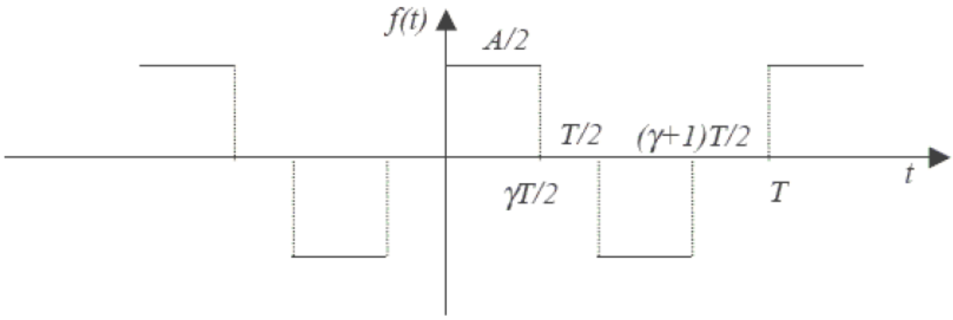


Figura 1:

a) Hallar la potencia media de la señal ($P_m(f)$).

b) Hallar el valor eficaz de la señal ($V_{ef}(f)$).

c) Si denotamos por $c_n(f)$ los coeficientes de Fourier de $f(t)$, indicar, justificando, cuánto vale la sumatoria (para n no negativo):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

d) Hallar la derivada como distribución de $f(t)$.

e) Hallar los valores del parámetro γ que aseguren que se anula el tercer armónico de la función $f(t)$.

Solución

Problema 1

a) Para hallar la solución en régimen periódico, observamos que hay dos fuentes sinusoidales puras, cuyas frecuencias son armónicas, es decir, una es múltiplo de la otra. No podemos pasar a un circuito equivalente en fasores. Podemos aplicar superposición, una fuente por vez, y ahí sí utilizar fasores.

Consideremos en primer término la fuente de tensión de pulsación 2ω (*abrimos* la fuente de corriente). El fasor de corriente por R_1 vale

$$I_{2\omega} = \frac{E}{R_1 + R_2 + Lj2\omega}$$

siendo E el fasor de la fuente de tensión. En el tiempo, el aporte a la corriente por parte de la fuente de tensión es $i_{2\omega}(t) = re\left[I_{2\omega}e^{j2\omega t}\right]$:

$$i_{2\omega}(t) = \frac{E}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + 4L^2\omega^2}} \cos\left[2\omega t - atan\left(\frac{2L\omega}{R_1+R_2}\right)\right] = I_{2\omega}\cos\left(2\omega t - \varphi_{2\omega}\right)$$

Si consideramos ahora sólo la fuente de corriente (*cortocircuimos* la fuente de tensión), aplicando divisor de corriente nos queda

$$I_{\omega} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Lj\omega} I$$

siendo I el fasor de la fuente de corriente. En el tiempo,

$$i_{\omega}(t) = \frac{R_2 I}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + L^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - atan\left(\frac{L\omega}{R_1+R_2}\right)\right] = I_{\omega}\cos\left(\omega t - \varphi_{\omega}\right)$$

La corriente total por R_1 será la suma de las anteriores:

$$i(t) = i_{2\omega}(t) + i_{\omega}(t)$$

b) Calcular la potencia instantánea $p(t)$ en R_1.

El cálculo directo da $p(t) = R_1 i^2(t)$:

$$p(t) = R_1 I_{2\omega}^2 \cos^2\left(2\omega t - \varphi_{2\omega}\right) + R_1 I_{\omega}^2 \cos^2\left(\omega t - \varphi_{\omega}\right) + 2R_1 I_{2\omega} I_{\omega} \cos\left(2\omega t - \varphi_{2\omega}\right)\cos\left(\omega t - \varphi_{\omega}\right)$$

c) Mostrar que dicha potencia consta de términos constantes y términos periódicos, cuya frecuencia se determinará.

Usando la identidad $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}\left[cos(a+b) + cos(a-b)\right]$, podemos ver que

$$p(t) = \frac{R_1 I_{2\omega}^2}{2}\left[1 + \cos\left(4\omega t - 2\varphi_{2\omega}\right)\right] + \frac{R_1 I_{\omega}^2}{2}\left[1 + \cos\left(2\omega t - 2\varphi_{\omega}\right)\right]$$
$$+ R_1 I_{2\omega} I_{\omega}\left[\cos\left(3\omega t - \varphi_{2\omega} - \varphi_{\omega}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi_{2\omega} + \varphi_{2\omega}\right)\right]$$

De donde

$$p(t) = \frac{R_1}{2}(I_{2\omega}^2 + I_{\omega}^2) + \text{términos sinusoidales en } \omega,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ y } 4\omega$$

es una señal periódica, de periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

d) Deducir el valor medio de dicha potencia (potencia activa en R_1).

Al promediar en un periodo, los términos sinusoidales dan media nula y sólo queda

$$P_m = \frac{R_1}{2}(I_{2\omega}^2 + I_\omega^2)$$

Observar que también puede escribirse como la potencia media obtenida si sólo estuviera la fuente de tensión más la potencia media obtenida si sólo estuviera la fuente de corriente, ya que debido a que las fuentes son armónicas, la potencia instantánea resulta periódica.

Problema 2

parte a) $v_i(t) - v_o(t) = R(i_C(t) + i_L(t))$. Luego $v_i'(t) - v_o'(t) = RCv_o''(t) + \frac{R}{L}v_o(t)$.

parte b) Multiplíquese la ecuación anterior por $\frac{L}{R}$ para obtener $\frac{L}{R}v_i'(t) = \frac{L}{R}v_o'(t) + LCv_o''(t) + v_o(t)$. Igualando $2\tau = L/R$ y $\tau^2 = LC$ resulta $2\tau v_i'(t) = 2\tau v_o'(t) + \tau^2 v_o''(t) + v_o(t)$, y de ello $2\tau\delta' * v_i = (\delta + 2\tau\delta' + \tau^2\delta'') * v_o$.

parte c) $S(t) = Y(t)f(t) \Rightarrow 2\tau f'(t) + \tau^2 f''(t) + f(t) = 0$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1/\tau^2$, cuya solución es $f(t) = \frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}$. Entonces $S(t) = Y(t)\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}$.

parte d) Convolucionando S de los dos lados de la ecuación de la parte b) se tiene $2\tau\delta' * S * v_i = S * D\delta * v_o = v_o$.
Entonces puede identificarse $h(t) = 2\tau S * \delta' = 2\tau S'(t) = \frac{2}{\tau}Y(t)e^{-t/\tau}(1 - t/\tau)$. Obsérvese que $f(0) = 0$ por lo que $S(t)$ no tiene saltos.

parte e) Substituyendo $v_i(t) = Y(t)$ en la ecuación de la parte b) se obtiene $2\tau\delta' * Y(t) = D\delta * v_o$, de lo cual resulta $2\tau\delta = D\delta * v_o$, y $v_o(t) = 2\tau(t)$ es solución.

parte f) Usando linealidad e invariancia temporal, $u_a(t) = (2\tau/a)(S(t) - S(t - a))$.

parte g) Por continuidad, $p_a(t) \to \delta$, luego $u_a(t) \to h(t)$.

parte h) Aquí pueden darse distintas respuestas. Onsérvese que cuando $t \to \infty$, $h(t) \to 0$, lo que implica que la respuesta natural del sistema se extingue.También podría decirse que al depender la salida de la derivada de la entrada, en régimen de continua la salida será nula, lo que es consistente con que la bobina se comporte como un cortocircuito.

Problema 3

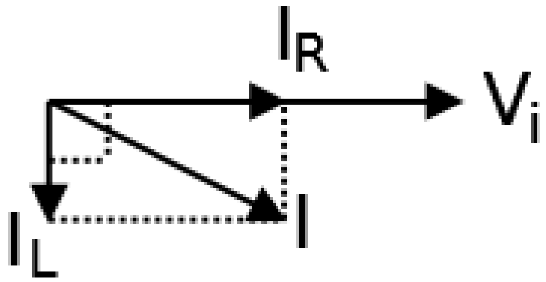
La presente resolución no incluye los cálculos numéricos, que se dejan como ejercicio. Los datos del modelo son: $v_i(t) = 311V \sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$ ($\Rightarrow \omega = 2\pi f = 100\pi\ rad/s$).

a) Diagrama fasorial tensión-corriente. Incluir las tensiones y corrientes de todos los elementos del circuito.

Sea V_i el fasor de tensión de la fuente y sean I, I_R e I_L los fasores de las corrientes por la fuente, la resistencia y la inductancia, respectivamente. Entonces

$$I_R = \frac{V_i}{R} \quad , \quad I_L = \frac{V_I}{Lj\omega} \quad , \quad I = I_R + I_L$$

Observemos que I_R es colineal con V_i, I_L es ortogonal a V_i e I está retrasado respecto de V_i.



b) Potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

Asumimos que trabajamos con fasores eficaces ($|V_i| = 311V/\sqrt{2} \approx 220V$). La potencia activa que entrega la fuente es la consumida por R, en tanto la reactiva la consume L. Al ser un modelo paralelo, es sencillo plantear $S = P + jQ$, con:

$$P = \frac{|V_1|^2}{R} \quad , \quad Q = \frac{|V_i|^2}{L\omega}$$

c) Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular el valor del condensador para compensar la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.

El condensador a colocar debe entregar la potencia reactiva que consume la bobina. Al estar en paralelo con el motor

$$Q_C = -|V_i|^2 C\omega = -Q \Rightarrow C = \frac{Q}{|V_i|^2\omega} = \frac{1}{L\omega^2}$$

Se puede llegar al mismo valor de C anulando la parte imaginaria de la admitancia total vista por la fuente.

Problema 4

a) Hallar la potencia media de la señal ($P_m(f)$).

El cálculo directo da

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{A^2}{4T}\left[\int_0^{\gamma\frac{T}{2}} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{(\gamma+1)\frac{T}{2}} dt\right] = \frac{A^2}{4T}\left[\gamma\frac{T}{2} + \gamma\frac{T}{2}\right] = \frac{\gamma A^2}{4}$$

b) Hallar el valor eficaz de la señal ($V_{ef}(f)$).

Por definición,

$$V_{ef}(f) = \sqrt{P_m} = \sqrt{\gamma}.\frac{A}{2}$$

c) Si denotamos por $c_n(f)$ los coeficientes de Fourier de $f(t)$, indicar, justificando, cuánto vale la sumatoria $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Por el Teorema de Parseval, sabemos que

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n\neq 0} |c_n(f)|^2$$

Sabiendo que f es una función real de valor medio nulo, resulta

$$P_m = \frac{\gamma A^2}{4} = 2\sum_{1}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{\gamma A^2}{8}$$

d) Hallar la derivada como distribución de $f(t)$.

Derivando f donde es derivable obtenemos la función nula en casi todo punto, por lo que la derivada de f como distribución sólo tiene δ's en los puntos de discontinuidad, con la amplitud del salto con signo. En un periodo, tenemos que

$$T_f'(s) = \frac{A}{2}.\left[\delta(s) - \delta_{\gamma\frac{T}{2}}(s) - \delta_{\frac{T}{2}}(s) + \delta_{(\gamma+1)\frac{T}{2}}(s)\right]$$

e) Hallar los valores del parámetro γ que aseguren que se anula el tercer armónico de $f(t)$.

Usando la relación entre los coeficientes de Fourier de f' (derivada como distribución) y los de f, sabemos que basta con anular el tercer armónico de la derivada como distribución. Planteamos la expresión del coeficiente de Fourier del tercer armónico de la derivada como distribución. El armónico genérico es:

$$c_n(\tilde{T}_f') = \frac{1}{T}\left\langle T_f'(s), e^{-jn\frac{2\pi}{T}s}\right\rangle = \frac{A}{2T}\left\langle \delta(s) - \delta_{\gamma\frac{T}{2}}(s) - \delta_{\frac{T}{2}}(s) + \delta_{(\gamma+1)\frac{T}{2}}(s), e^{-jn\frac{2\pi}{T}s}\right\rangle$$

De donde

$$c_n(\tilde{T}_f') = \frac{A}{2T}.\left[1 - e^{-jn\frac{2\pi}{T}\gamma\frac{T}{2}} - e^{-jn\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} + e^{-jn\frac{2\pi}{T}(\gamma+1)\frac{T}{2}}\right] = \frac{A}{2T}.\left[1 - e^{-jn\gamma\pi} - e^{-jn\pi} + e^{-jn(\gamma+1)\pi}\right]$$

$$c_n(f) = \frac{A}{2T}.\left[1 - (-1)^n - e^{-jn\gamma\pi}(1-(-1)^n)\right] = \frac{A}{2T}.(1-(-1)^n).\left[1 - e^{-jn\gamma\pi}\right]$$

Para $n = 3$, resulta

$$c_3(\tilde{T}_f') = \frac{A}{T}.\left[1 - e^{-j3\gamma\pi}\right]$$

Para anular c_3 (y c_{-3}), imponemos

$$e^{-j3\gamma\pi} = 1 \Rightarrow 3\gamma\pi = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

De la figura, resulta claro que $0 \leq \gamma \leq 1$, por lo que $\gamma = \frac{2}{3}$, correspondiente a $k = 1$.