Sistemas Lineales 1

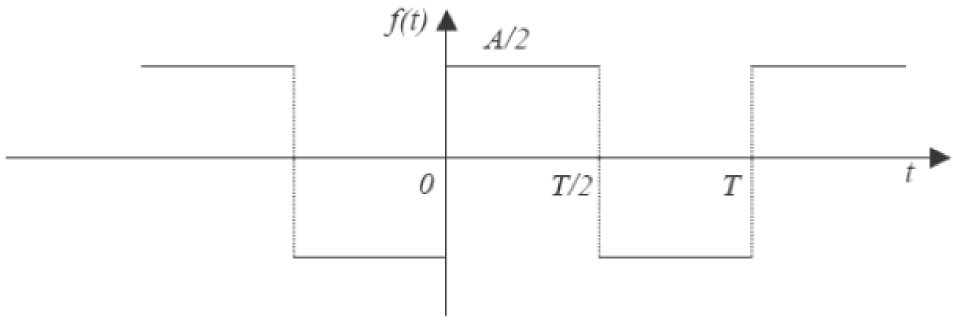
Primer parcial

1^{er} semestre 2017

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

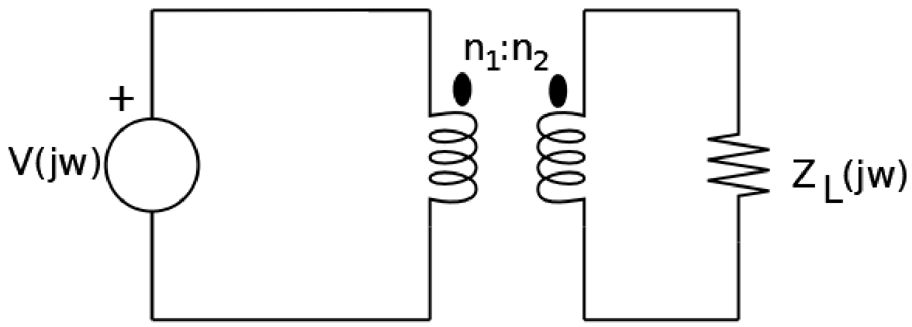
Problema 1 (9 puntos)



a) Hallar los coeficientes de Fourier de la onda cuadrada de la figura, considerada como función.

b) A partir de la definición de coeficiente de Fourier de una distribución periódica, hallar los coeficientes de Fourier de la derivada como distribución de la onda cuadrada de la figura.

Problema 2 (11 puntos) Se considera el circuito de la figura.



a) Hallar la impedancia vista por la fuente en función de Z_L y los parámetros del transformador ideal.

De ahora en adelante, $Z_L(j\omega)$ será la serie de una resistencia R, una inductancia L y un condensador C. Se cumple que

$$\frac{R}{L} = \omega_0 > 0 \quad , \quad \frac{1}{RC} = \alpha\omega_0 \quad , \quad \alpha > 0$$

b) Expresar $Z_L(j\omega)$ en función de R, ω_0 y α.

c) Mostrar que para $\alpha = \frac{1}{8}$, a la frecuencia de trabajo ω_0 la impedancia $Z_L(j\omega_0)$ es inductiva.

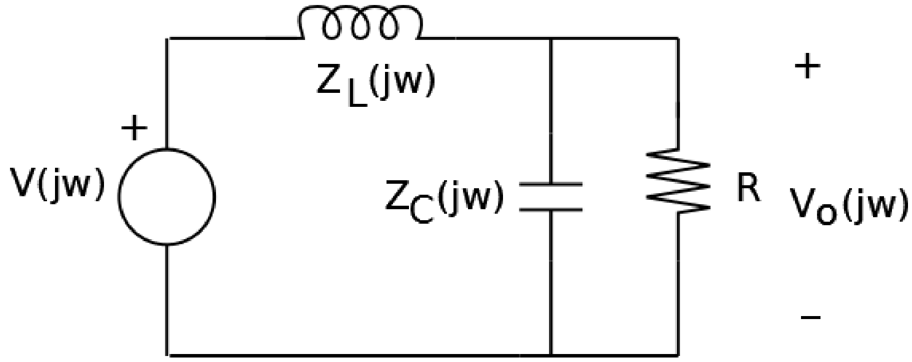
d) Para dicho valor de α y siendo $v(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$, con A medido en voltios,

i) calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente;

ii) compensar la reactiva consumida por la carga, indicando qué elemento colocaría, de qué valor, y el respectivo esquema de conexión.

Problema 3 (11 puntos)

El esquema de la figura representa una carga resistiva R conectada a una fuente sinusoidal de tensión



de amplitud A_i a través de una bobina L. A la carga R se le conectará un condesador C en paralelo, cuya capacitancia habrá de calcularse según se indica más abajo. La frecuencia angular de trabajo es $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\tau}$, con $\tau = \frac{L}{R}$. En referencia a esta figura se busca:

a) Calcular la capacidad del condensador C para que el **módulo** de la tensión de salida V_o sea igual al de la entrada V_i, a la frecuencia ω_0. Expresar las soluciones en función de L y R.

b) Para la solución de la parte anterior de menor capacitancia, obtener la función de transferencia

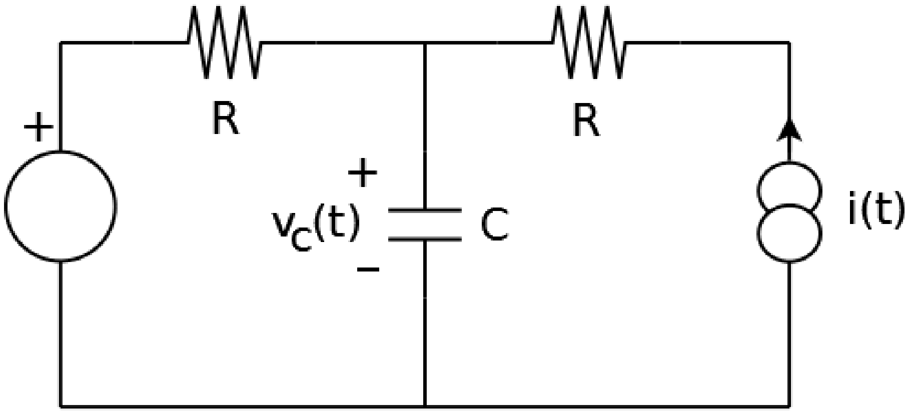
$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

paramétrica en τ. Hallar los valores de $H(j\omega)$ para $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ y $\omega \to +\infty$.

c) Si la entrada es $v_i(t) = A_i.sen(\omega_0 t)$, calcular las potencias activa y reactiva P_i y Q_i entregadas por la fuente y P_0 y Q_0 consumidas por el paralelo de la carga R y el condensador C. Indicar la relación entre P_i y P_0.

Problema 4 (9 puntos)

Se considera el circuito lineal de la figura, con el condensador inicialmente descargado.



a) Aplicando el principio de superposición, mostrar que existen dos distribuciones h_1 y h_2 tales que

$$v_C(t) = h_1(t) * v(t) + h_2(t) * i(t)$$

b) Mostrar que $h_2(t) = R.h_1(t)$.

c) Hallar $h_1(t)$.

d) Hallar $v_c(t)$ para el caso $v(t) = Y(t).E$, $i(t) = Y(t).\frac{E}{R}$.

Solución

Problema 1

a) La definición del n-ésimo coeficiente de Fourier de una función periódica $f(t)$ es:

$$c_n(f) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx$$

siendo τ el periodo y $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ la pulsación. El cálculo de los coeficientes de Fourier para este caso particular puede encontrarse en las notas del curso.

b) La definición del n-ésimo coeficiente de Fourier de una distribución periódica $\tilde{T}(t) \in \mathcal{D}'$ es:

$$c_n(\tilde{T}) = \frac{1}{\tau}\left\langle T(s), e^{-jn\omega_0 s}\right\rangle$$

siendo τ el periodo, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ la pulsación, $T(s) \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ la distribución asociada a $\tilde{T} \in \mathcal{D}'$ que la representa en un periodo y $e^{-jn\omega_0 s}$ pertenenciente al conjunto $\mathcal{D}(Gamma)$ de funciones infinitamente derivables definidas sobre Γ, la circunferencia de longitud τ dentrada en el origen del plano. Para el caso particular considerado, la distribución periódica en cuestón es la derivada como distribución de la onda cuadrada. Aplicando que la distribución asociada a una función seccionalmente derivable se deriva como función donde es derivable y agrega impulsos en los puntos de discontinuidad, con amplitud igual al salto con signo, tenemos que la distribución a considerar es

$$\tilde{T}(t) = A.\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta_{n\frac{\tau}{2}}(t)$$

de donde

$$T(s) = A\left[\delta(s) - \delta_{\frac{\tau}{2}}(s)\right]$$

verificando para toda $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$< \underbrace{\tilde{T}(t)}_{\in\mathcal{D}'}, \underbrace{\varphi(t)}_{\in\mathcal{D}} > = < \underbrace{\tilde{T}(s)}_{\in\mathcal{D}'(\Gamma)}, \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(s-n\tau)}_{\in\mathcal{D}(\Gamma)} >$$

El cÃ¡lculo del coeficiente de Fourier da

$$c_n(\tilde{T}) = \frac{1}{\tau}\left\langle A\left[\delta(s) - \delta_{\frac{\tau}{2}}(s)\right], e^{-jn\omega_0 s}\right\rangle = \frac{A}{\tau}\left[1 - e^{-jn\omega_0\frac{\tau}{2}}\right] = \frac{A}{\tau}\left[1-(-1)^n\right]$$

O sea, 0 si n es par y $\frac{2A}{\tau}$ si n impar. Este resultado es consistente con la relación entre los coeficientes de Fourier de una distribución periódica y los de su derivada.

Problema 2

a) Definamos las tensiones y corrientes del primario y secundario del trafo con la convención usual (tensiones medidas desde los puntos y corrientes entrantes por los puntos). Entonces, pasando ya a régimen sinusoidal:

$$\frac{V_1(j\omega)}{n_1} = \frac{V_2(j\omega)}{n_2} \quad , \quad n_1I_1(j\omega) + n_2I_2(j\omega) = 0$$

Planteando la malla del secundario, obtenemos

$$V_2(j\omega) = -I_2(j\omega).Z_L(j\omega)$$

(observar el signo de menos, que proviene del sentido elegido para la corriente del secundario).

La impedancia vista por la fuente es

$$Z_V(j\omega) = \frac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}$$

Combinando con las ecuaciones del transformador, obtenemos

$$Z_V(j\omega) = \frac{\frac{n_1}{n_2}V_2(j\omega)}{-\frac{n_2}{n_1}I_2(j\omega)} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{V_2(j\omega)}{-I_2(j\omega)} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .Z_L(j\omega)$$

b)

$$Z_L(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} = \frac{RCj\omega + LC(j\omega)^2 + 1}{Cj\omega} = \frac{LC}{C}.\left[\frac{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}{j\omega}\right]$$

Sabemos que $\frac{R}{L} = \omega_0$, $\frac{1}{RC} = \alpha\omega_0$, por lo que $\frac{1}{LC} = \alpha\omega_0^2$ y $L = \frac{R}{\omega_0}$. Entonces

$$Z_L(j\omega) = R.\left[\frac{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \alpha\omega_0^2}{\omega_0(j\omega)}\right]$$

c) Calculemos $Z_L(j\omega_0)$ para $\alpha = \frac{1}{8}$:

$$Z_L(j\omega_0) = R.\left[\frac{(j\omega_0)^2 + \omega_0(j\omega_0) + \frac{1}{8}\omega_0^2}{\omega_0(j\omega_0)}\right] = R.\left[\frac{-1 + j + \frac{1}{8}}{j}\right] = R.\left[1 + j\left(1 - \frac{1}{8}\right)\right] \approx 1,33R\angle 41^o$$

La parte imaginaria (la rectancia) es positiva, por lo que la impedancia es de tipo inductivo a la frecuencia ω_0.

d-i) Calculemos las potencias activa, rectiva y aparente. Trabajamos con valores eficaces.

$$P = re\left[V(j\omega_0)\overline{I_1(j\omega_0)}\right] = re\left[V(j\omega_0)\overline{\frac{V(j\omega_0)}{Z_V(j\omega_0)}}\right] = |V(j\omega_0)|^2.re\left[\frac{1}{\overline{Z_V(j\omega_0)}}\right] = \frac{|V(j\omega_0)|^2}{|Z_V(j\omega_0)|^2}.re\left[Z_V(j\omega_0)\right] =$$

$$\frac{|V(j\omega_0)|^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^4.|Z_L(j\omega_0)|^2}.re\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2.Z_L(j\omega_0)\right] = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.\frac{|V(j\omega_0)|^2}{(1,33R)^2}.R$$

$$= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.\frac{A^2}{(1,33)^2R}W \approx 0,57.\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.\frac{A^2}{R}W$$

Como el factor de potencia es $\cos(41^o)$, la reactiva consumida vale

$$Q = P.tg(41^o) \approx 0,49.\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.\frac{A^2}{R}VAR$$

Finalmente, $S = \sqrt{P^2 + Q^2}VA$.

d-ii) Para compensar la reactiva, colocamos en paralelo con la fuente un condensador C_1 que entregue la reactiva que consume la impedancia inductiva. La potencia reactiva del condensador vale

$$Q_{C_1} = -|V(j\omega_0)|^2 C_1 \omega_0$$

De la igualdad $Q_{C_1} = -Q$, obtenemos

$$A^2 C_1 \omega_0 = 0,49. \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . \frac{A^2}{R} \Rightarrow C_1 \approx \frac{0,49}{R\omega_0} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

Observar que podríamos colocar un condensador del lado del secundario. El valor respectivo está relacionado con el ya calculado, a través de la relación de transformación.

Problema 3

a) Dado que la impedancia de la resistencia y condensador en paralelo es $Z = R/(1 + jRC\omega)$, entonces la transferencia del circuito puede calcularse como el siguiente divisor de voltaje

$$H(j\omega) := \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{Z(j\omega)}{Z(j\omega) + j\omega L} = \frac{R}{R(1 + LC(j\omega)^2) + j\omega L} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega L/R}$$

Entonces el condensador ha de cumplir

$$|H(j\omega_0)|^2 := \frac{1}{(1 - LC\omega_0^2)^2 + \omega_0^2 (L/R)^2} = 1$$

y substituyendo $\omega_0^2 (L/R)^2 = \omega_0^2 \tau^2 = 3/4$ la condición anterior equivale a

$$\begin{aligned}
&(1 - LC\omega_0^2)^2 + 3/4 = 1 \\
&(1 - LC\omega_0^2) = \pm\sqrt{1 - 3/4} = \pm 1/2 \\
&LC\omega_0^2 = 1 \mp 1/2 \\
&C = \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{1 \mp 1/2}{L}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{1 \mp 1/2}{L}\right) = \left(\frac{4L}{3R^2}\right)(1 \mp 1/2).
\end{aligned}$$

donde se utilizó $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2\tau}$

b) Eligiendo el signo negativo en la solución anterior se tiene $LC = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) = \frac{2}{3}\tau^2$ y luego

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\tau^2\omega^2 + j\omega\tau}$$

Dado que $\tau\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene entonces

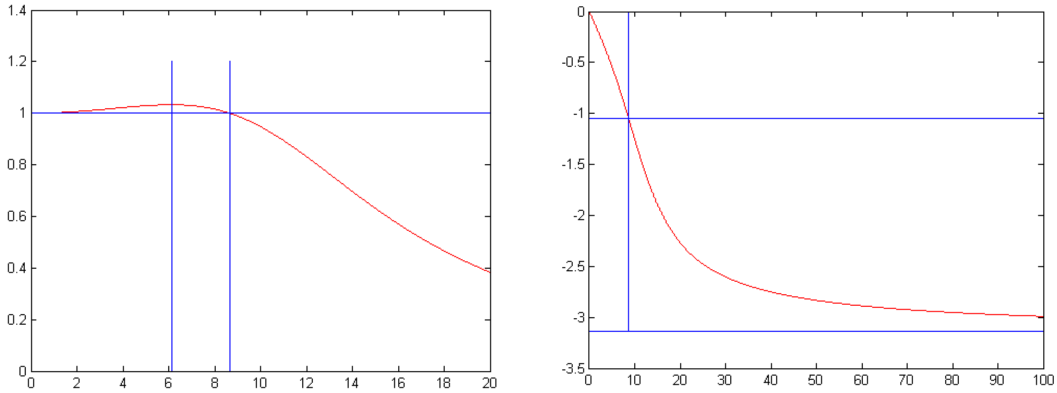


Figura 1: Módulo y fase de $H(j\omega)$.

$$H(0) = 1$$
$$H(j\omega_0) = \frac{1}{1/2 + j\sqrt{3}/2} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$
$$H(j\infty) = 0$$

También es correcto obtener los valores en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$ abriendo y/o cortocircuitando la bobina y el condensador.

c) Se tiene que $L\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ y $H^*(j\omega_0) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces en la fuente

$$S_i = V_i \left(\frac{V_i^* - V_o^*}{-jL\omega_0} \right) = \frac{jA_i^2}{2} \left(\frac{1 - H^*(j\omega_0)}{L\omega_0} \right) = \frac{jA_i^2}{2} \left(\frac{1 - 1/2 - j\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \right) = \frac{A_i^2}{2R} + j\frac{A_i^2}{2\sqrt{3}R}$$

Nota: Para compensar reactiva se necesitaría $\bar{C}$ tal que $L\bar{C}\omega^2 = 1$. Luego $C = \frac{1}{2}\bar{C} < \bar{C}$ por lo que la fuente debe entregar reactiva.

La potencia consumida por R coincide con la activa entregada por la fuente, y la reactiva en C vale

$$Q_C = \frac{A_i^2}{2}C\omega_0 = \frac{A_i^2}{2\sqrt{3}R}.$$

donde se usó $C\omega_0 = LC\omega_0^2/(L\omega_0) = 1/(\sqrt{3}R)$.

Problema 4

a) Por el principio de superposición, sabemos que la tensión en el condesador puede escribir como

$$v_C(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t)$$

siendo $v_{C_1}(t)$ la tensión en bornes del condensador cuando anulamos la fuente de corriente (*abrimos* la segunda malla) y $v_{C_2}(t)$ la tensión en bornes del condensador cuando anulamos la fuente de tensión (la *cortocircuitamos*).

Al ser lineales los dos nuevos circuitos lineales que obtenemos al anular de a una las fuentes independientes, sabemos que existen dos distribuciones h_1 y h_2 tales que

$$v_{C_1}(t) = h_1(t) * v(t)$$

$$v_{C_2}(t) = h_2(t) * i(t)$$

b) Veamos la ecuación diferencial que caracteriza $h_1(t)$. Aplicando Kirchoff en la única malla que resulta de anular la fuente de corriente, obtenemos

$$v(t) = RC\frac{\partial v_{C_1}(t)}{\partial t} + v_{C_1}(t) = \left[RC\frac{\partial}{\partial t} + 1\right] v_{C_1}(t) = \left[RC\delta'(t) + \delta(t)\right] * v_{C_1}(t)$$

de donde

$$h_1(t) = \left[RC\delta'(t) + \delta(t)\right]^{-1} = \frac{1}{RC}.\left[\delta'(t) + \frac{1}{RC}\delta(t)\right]^{-1}$$

Si aplicamos Kirchoff de nudos en el circuito que obtenemos al anular la fuente de tensión, obtenemos

$$i(t) = \frac{v_{C_2}(t)}{R} + C\frac{\partial v_{C_2}(t)}{\partial t} \Rightarrow R.i(t) = v_{C_2}(t) + RC\frac{\partial v_{C_2}(t)}{\partial t}$$

$$R.i(t) = \left[RC\frac{\partial}{\partial t} + 1\right] v_{C_2}(t) = \left[RC\delta'(t) + \delta(t)\right] * v_{C_2}(t)$$

De donde

$$i(t) = C\left[\delta'(t) + \frac{1}{RC}\delta(t)\right] * v_{C_2}(t)$$

y

$$h_2(t) = \frac{1}{C}.\left[\delta'(t) + \frac{1}{RC}\delta(t)\right]^{-1} = R.h_1(t)$$

c) Observemos que $h_1(t)$ es la solución elemental del operador lineal de primer orden

$$D_1 = \left[RC\frac{\partial}{\partial t} + 1\right]$$

Calculemos primero la solución elemental del operador lineal normalizado

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{RC}$$

que verifica $D_1 = RC.D$

Por el resultado visto en el curso, sabemos que la solución elemental del operador D, $(D\delta)^{-1}$, es de la forma $Y(t)f(t)$, con f función solución de la ecuación diferencial $Df = 0$ con condición inicial $f(0) = 1$. Resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos

$$f(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entonces $(D\delta)^{-1} = Y(t)f(t)$ y

$$\boxed{h_1(t) = (D_1\delta)^{-1} = [RC.D\delta]^{-1} = \frac{1}{RC}.(D\delta)^{-1} = \frac{1}{RC}.Y(t)e^{-\frac{t}{RC}}}$$

(Obsérvese que equivale a resolver la ecuación diferencial $D_1 f = 0$, con condición inicial $f(0) = \frac{1}{RC}$.)

d) De las partes anteriores, tenemos que

$$v_C(t) = h_1(t) * v(t) + h_2(t) * i(t) = h_1(t) * [v(t) + R.i(t)]$$

Para las entradas dadas por la letra,

$$v_C(t) = h_1(t) * \left[Y(t).E + R.Y(t).\frac{E}{R}\right] = 2h_1(t) * Y(t).E = 2\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x).Y(x).Edx$$

Al ser ambas funciones con soporte en la semirrecta positiva, la integral es nula para $t \leq 0$ y para tiempos positivos, obtenemos

$$v_C(t) = 2E\int_0^t \frac{1}{RC}e^{-\frac{x}{RC}}dx = \frac{2E}{RC}.\left[\left.\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{\frac{1}{RC}}\right|_0^t\right] = 2E\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)$$

Entonces

$$\boxed{v_C(t) = 2Y(t).2E\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)}$$