Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2016

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

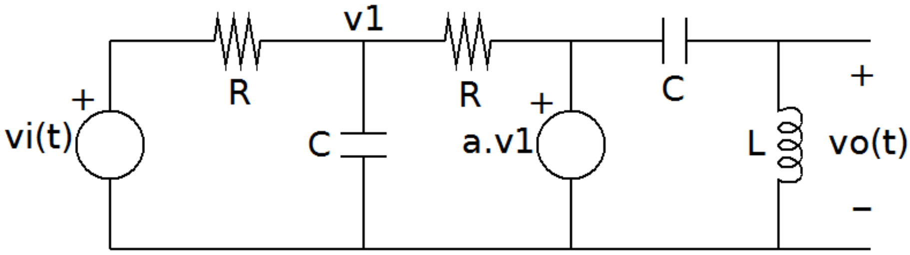
Problema 1 (7 puntos)

a) Sea $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Definir el concepto de fasor y hallar el fasor X asociado a $x(t)$.

b) Para una componente dada, funcionando en régimen sinusoidal, se conoce su tensión en bornes $v(t) = A_v \cos(\omega_0 t + \varphi_v)$ y su corriente $i(t) = A_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$, medida en el sentido de la caida de tensión. Deducir una expresión para la potencia media consumida por la componente en función de los fasores asociados a la tensión y a la corriente.

c) Si la señal $v(t) = A_v \cos(\omega_0 t + \varphi_v)$ se inyecta en un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega)$, deducir la expresión de la respectiva respuesta en régimen, indicando en particular la relación entre las amplitudes de la entrada y la respuesta y la diferencia de fase entre ambas señales.

Problema 2 (11 puntos) Se considera el circuito de la figura.



a) Dibujar el circuito equivalente en fasores.

b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega)$, tomando como entrada la tensión de la fuente independiente y como salida la tensión en bornes de la bobina.

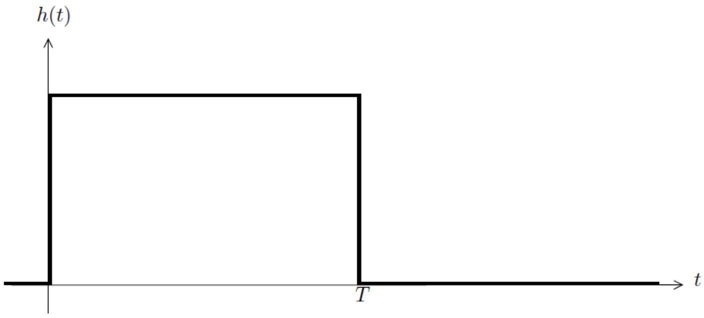
c) Se sabe que $a = 12$. Verificar que es posible elegir los parámetros R, L y C de forma tal que

$$H(j\omega) = 12 \frac{\omega_0 (j\omega)^2}{\left[(j\omega)^2 + \omega_0^2\right](j\omega - 10\omega_0)}$$

d) Hallar el valor de H (módulo y fase) en las siguientes frecuencias: $\frac{\omega_0}{10}$, ω_0, $10\omega_0$.

Problema 3 (11 puntos)

Considere un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo, con respuesta al impulso T_h, siendo h la función de la figura.



a) Sea $W > 0$ y considere las funciones $\alpha(t)$, con soporte incluido en el intervalo $[-W, W]$. Determine un rango de valores para t que asegure que $\langle T_h(\tau), \alpha(t-\tau) \rangle = 0$, para toda α.

b) Calcule la respuesta del sistema para la entrada $e_1(t) = Y(t)$.

c) Calcule la respuesta del sistema ante la entrada

$$e_2(t) = k_1 Y(t) + k_2 Y(t-T)$$

utilizando **exclusivamente** el resultado anterior y las propiedades del sistema.

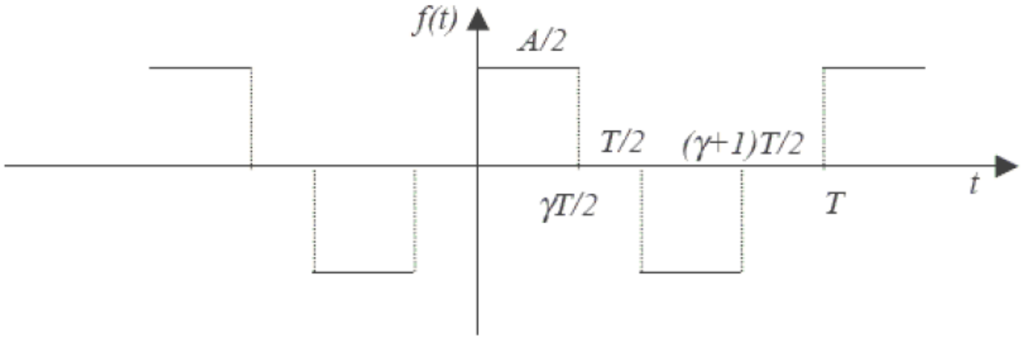
d) Calcule la respuesta del sistema ante la entrada

$$e_3(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} sen(\omega_0 kT)\delta(t-kT) \quad , \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4T}$$

Para este caso, bosqueje en una misma gráfica la entrada y la respuesta obtenida.

Problema 4 (11 puntos)

Se considera la señal periódica $f(t)$ de la figura.



a) Hallar el valor medio de $f(t)$.

b) Hallar una expresión genérica de los coeficientes de Fourier de $f(t)$.

c) Hallar los valores del parámetro γ que aseguran que se anula el tercer armónico de la señal.

d) Se considera un sistema de transferencia en régimen $H(j\omega)$, de tipo pasabajos:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_C^2}{(j\omega + \omega_C)^2}$$

Hallar la expresión analítica aproximada de la salida en régimen cuando la entrada es $f(t)$, sabiendo que se cumple que $\omega_C = \frac{6\pi}{T}$.

Solución

Problema 1

a) Dada una señal sinusoidal $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, se define su fasor como el número complejo X que satisface la identidad
$$x(t) = re\left[Xe^{j\omega_0 t}\right]$$
Para este caso, $X = Ae^{j\varphi}$.

b) La expresión de la potencia media de una componente en régimen sinusoidal, con tensión en bornes $v(t)$ y corriente $i(t)$, medidas con la misma convención que la Ley de Ohm, en función de los fasores de tensión y corrientes asociados, es:
$$P_m = \frac{1}{2} re[\mathcal{V}.\overline{\mathcal{I}}]$$
(sin el 1/2 si trabajamos en valores eficaces). Ver la demostración en las notas del curso.

c) La transferencia en régimen sinusoidal verifica que los fasores de entrada y salida, $V_i(j\omega)$ y $V_o(j\omega)$, satisfacen la relación
$$V_o(j\omega) = H(j\omega).V_i(j\omega)$$
Entonces,
$$v_o(t) = re\left[V_o(j\omega).e^{j\omega t}\right] = re\left[H(j\omega).V_i(j\omega).e^{j\omega t}\right] = re\left[|H(j\omega)|.|V_i(j\omega)|.e^{j[\omega t + arg\, V_i(j\omega)\, +\, arg\, H(j\omega)]}\right]$$
Tomando parte real, obtenemos
$$v_o(t) = |H(j\omega)|.|V_i(j\omega)|\cos\left[\omega t + arg\, V_i(j\omega)\ +\ arg\, H(j\omega)\right]$$

Problema 2

Consideremos el circuito en fasores. Planteando el nudo en V_1, obtenemos
$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 Cj\omega + \frac{V_1 - V_2}{R}$$
donde $V_2 = aV_1$, por lo que podemos despejar $V1$ en función de V_i:
$$\boxed{V_1 = \frac{V_i}{2 - a + RCj\omega}}$$
La salida se obtiene directamente de V_2 a través de un divisor de tensión:
$$V_o = \left(\frac{Lj\omega}{\frac{1}{Cj\omega} + Lj\omega}\right).V_2 \Rightarrow \boxed{V_o = \frac{aLC(j\omega)^2.V_i}{(1 + LC(j\omega)^2).(2 - a + RCj\omega)}}$$
de donde
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{aLC(j\omega)^2}{(1 + LC(j\omega)^2).(2 - a + RCj\omega)}}$$

Para $a = 12$ y operando, obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{12\frac{1}{RC}(j\omega)^2}{(\frac{1}{LC} + (j\omega)^2).(\frac{-10}{RC} + j\omega)}$$

Podemos identificar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, obteniendo

$$H(j\omega) = \frac{12\omega_0(j\omega)^2}{(\omega_0^2 + (j\omega)^2).(j\omega - 10\omega_0)}$$

Hallamos los valores de $H(j\omega)$ para las frecuencias pedidas:

- $\omega = \omega_0 \Rightarrow$
$$H(j\omega_0) = \frac{12\omega_0(j\omega_0)^2}{(\omega_0^2 + (j\omega_0)^2).(j\omega_0 - 10\omega_0)} = \frac{-12}{(1-1).(j-10)} \rightarrow +\infty$$
- $\omega = 10\omega_0 \Rightarrow$
$$H(j10\omega_0) = \frac{12\omega_0(j10\omega_0)^2}{(\omega_0^2 + (j10\omega_0)^2).(j10\omega_0 - 10\omega_0)} = \frac{-120}{(1-100).(j-1)}$$
De donde
$$\begin{cases} |H(j10\omega_0)| & = & \frac{120}{99\sqrt{2}} \\ arg\, H(j10\omega_0) & = & +\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$
- $\omega = \frac{\omega_0}{10} \Rightarrow$
$$H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = \frac{12\omega_0\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)^2}{(\omega_0^2 + \left(j\frac{\omega_0}{10}\right)^2).(j\frac{\omega_0}{10} - 10\omega_0)} = \frac{-\frac{12}{100}}{\left(1 - \frac{1}{100}\right) . \left(\frac{j}{10} - 10\right)} \approx \frac{-\frac{12}{100}}{(1) . (-10)} = \frac{12}{1000}$$
De donde
$$\begin{cases} |H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)| & = & \frac{12}{1000} \\ arg\, H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) & = & 0 \end{cases}$$

Problema 3

a) Calculemos la expresión
$$\langle T_h(\tau), \alpha(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\alpha(t-\tau)d\tau$$
Esta integral se reduce a integrar en la intersección de los soportes de $h(\tau)$ y $\alpha(t-\tau)$. Como el sporte de $\alpha(\tau)$ está incluido en $[-W, W]$, el soporte de $\alpha(t-\tau)$ está incluido en $[t-W, t+W]$. La convolución pedida se anulará siempre que
$$t + W < 0 \Rightarrow t < -W$$
y
$$T < t - W \Rightarrow t > T + W$$

b) Como las dos señales tienen soporte en la semirrecta positiva, la respuesta del sistema será

$$r_1(t) = T_h(t) \star e_1(t) = T_h(t) \star Y(t) = \int_0^t h(t)dt = \begin{cases} At & , \quad t < T \\ AT & , \quad t > T \end{cases}$$

para t positivo y 0 para t negativo, siendo A la altura de T_h. Podemos poner

$$r_1(t) = Y(t).At - Y(t-T)\left[A(t-T) + AT\right]$$

c) Como el sistema es lineal, causal e invariante en el tiempo, sabmoes que si $r(t)$ es la respuesta a $e(t)$, entonces $K.r(t-\tau)$ es la respuesta a $K.e(t-\tau)$. Entonces, la respuesta a $e_2(t) = k_1.Y(t) + k_2.Y(t-T)$ vale

$$r_2(t) = k_1\left[Y(t).At - Y(t-T)\left[A(t-T)\right] + AT\right] + k_2\left[Y(t-T).At - Y(t-2T)\left[A(t-2T) + AT\right]\right]$$

d) Para la entrada

$$e_3(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} sen(\omega_0 kT)\delta(t-kT) \quad , \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4T}$$

Esencialmente, tenemos un peine de Dirac, de periodo T, en la que la amplitud de cada δ está afectada por el valor del $\sin(\omega_0 t)$ en el asiento de la δ. Observemos que la relación entre T y el periodo T' de la sinusoide es: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\pi}{4T} \Rightarrow T = \frac{T'}{8}$.

La linealidad y continuidad del sistema nos dice que $r_3(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} sen(\omega_0 kT)h(t-kT)$.

Para ver qué es esta señal, veamos los primeros valores de k. Para $k=0$, tenemos la h original, multiplicada por 0. Para $k=1$, tenemos la h corrida a T, multiplicada por $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$. O sea, que el valor del seno en T se mantiene durante la duración de h. En general, entre kT y $(k+1)T$ la respuesta va a ser constante, de valor $sen\left(k\frac{\pi}{4}\right)$. Se reconstruye un seno *escalonado* (ver figura 1).

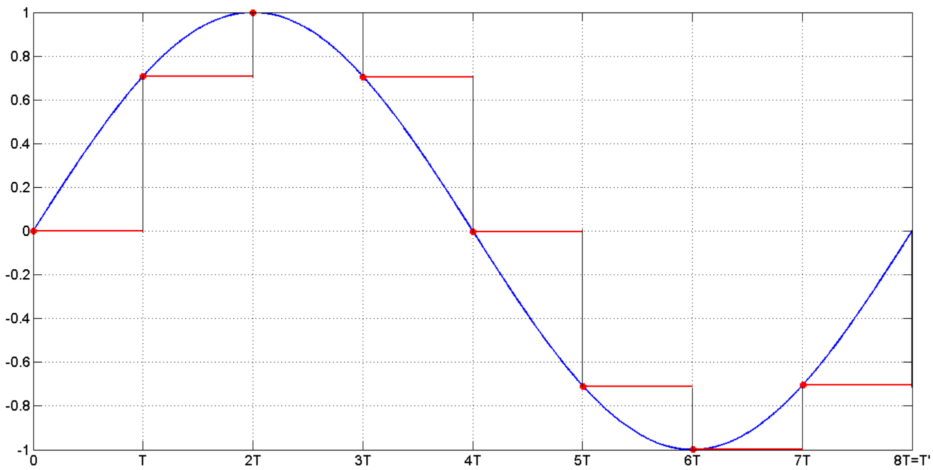


Figura 1: Seno muestreado y reconstruido

Problema 4

a) Es claro que el valor medio es nulo, ya que el área en un periodo se anula.

b) Calculemos primero el coeficiente de Fourier genérico de f y luego veamos en articular el $c_3(f)$ para anularlo (como f es real, $c_{-3}(f) = \overline{c_3(f)}$). Definamos $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\gamma\frac{T}{2}} \frac{A}{2}e^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{(\gamma+1)\frac{T}{2}} \left(-\frac{A}{2}\right)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Observemos que del dibujo sale que $\gamma\frac{T}{2} < \frac{T}{2}$, por lo que $0 < \gamma < 1$. Integrando, para $|n| \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{A}{2T}\left[\left.\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_0^{\gamma\frac{T}{2}} - \left.\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{\frac{T}{2}}^{(\gamma+1)\frac{T}{2}}\right] = \frac{A}{2T}\left[\frac{e^{-jn\omega_0\gamma\frac{T}{2}} - 1}{-jn\omega_0} - \frac{e^{-jn\omega_0(\gamma+1)\frac{T}{2}} - e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}}}{-jn\omega_0}\right]$$

$$= -\frac{A}{2T}\left[\frac{e^{-jn\pi\gamma} - 1}{jn\omega_0} - \frac{e^{-jn\pi(\gamma+1)} - e^{-jn\pi}}{jn\omega_0}\right] = -\frac{A}{2jn\omega_0 T}\left[e^{-jn\pi\gamma} - 1 - e^{-jn\pi(\gamma+1)} + (-1)^n\right]$$

$$= -\frac{A}{2jn\omega_0 T}\left[e^{-jn\pi\gamma}\left(1 - e^{-jn\pi}\right) - 1 + (-1)^n\right] = -\frac{A}{2jn\omega_0 T}\left[e^{-jn\pi\gamma}\left(1 - (-1)^n\right) - \left(1 - (-1)^n\right)\right]$$

$$= -\frac{A}{4jn\pi}\left(e^{-jn\pi\gamma} - 1\right)\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow \text{se anulan los armónicos pares}$$

c) Entonces, para $n = 3$,

$$c_3(f) = -\frac{A}{2jn\omega_0 T}\left(e^{-j3\pi\gamma} - 1\right)\left(1 - (-1)^3\right) = 0 \Rightarrow e^{-j3\pi\gamma} = 1$$

Despejando, obtenemos que $3\pi\gamma$ debe ser múltiplo de 2π:

$$3\pi\gamma = 2k\pi \quad , \quad k\ entero$$

$$\gamma = \frac{2k}{3} \quad , \quad k\ entero$$

Como γ es menor que 1, los valores posibles con con $k = 1$:

$$\boxed{\gamma = \frac{2}{3}}$$

d) La respuesta en régimen del sistema de transferencia en régimen $H(j\omega)$ ante una sinusoide es otra sinusoide con amplitud amplificada por el módulo de la transferencia a la frecuencia de trabajo y con un desfasaje respecto de la entrada igual al argumento de la transferencia a la frecuencia de trabajo. El resultado se extiende a señales periódicas considerando la serie de Fourier de la entrada. La salida también es periódica y sus coeficientes de Fourier son los de la entrada, multiplicados por el valor de la transferencia evaluada en el armónico correspondiente.

Si denotamos por $c_n(r)$ los coeficientes de Fourier de la respuesta en régimen a la entrada $f(t)$, sabemos que

$$c_n(r) = c_n(f).H(jn\omega_0) = c_n(f).\frac{\omega_C^2}{(jn\omega_0 + \omega_C)^2}$$

De donde

$$|c_n(r)| = |c_n(f)|.\frac{\omega_C^2}{n^2\omega_0^2 + \omega_C^2}$$

Con el dato $\omega_C = \frac{6\pi}{T} = 3\omega_0$, podemos considerar que por el sistema sólo pasa el primer armónico, pues el segundo y el tercero vale cero y el cuarto se anula.

$$\frac{9\omega_0^2}{16^2\omega_0^2 + 9\omega_0^2} = \frac{9}{25}$$

El primer armónico se atenúa

$$\frac{9\omega_0^2}{\omega_0^2 + 9\omega_0^2} = \frac{9}{10}$$

Con las consideraciones anteriores, y observando que la entrada tiene valor medio nulo, la respuesta en régimen es aproximadamente

$$r(t) \approx c_1(f)H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + c_{-1}(f)H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}$$

con $c_1(f) = \frac{A}{2j\pi}.\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{A}{2\pi}.e^{-210^o}$.
Veamos la transferencia en el primer armónico:

$$H(j\omega_0) = \frac{\omega_C^2}{(j\omega_0 + \omega_C)^2} = \frac{9\omega_0^2}{(j\omega_0 + 3\omega_0)^2} = \frac{9}{(j+3)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & = & \frac{9}{10} \\ arg(H) & = & -2\,atan\left(\frac{1}{3}\right) = -\varphi \end{cases}$$

Observemos que $H(-j\omega_0) = \overline{H(j\omega_0)}$. Como además $c_1(f) = \overline{c_{-1}(f)}$ por ser f real, tenemos que

$$r(t) \approx 2re\left[c_1(f)H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\right] = 2re\left[\frac{A}{2\pi}\frac{9}{10}e^{j(\omega_0 t - 210^o - \varphi)}\right]$$

$$= \frac{9A}{10\pi}\cos\left(\omega_0 t - 210^o - \varphi\right)$$