Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2015

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (8 puntos)

a) Verificar que $T(t) = Y(t) + \delta'(t)$ es la inversa como distribución de $S(t) = Y(t)\cos(t)$.

b) Se considera un sistema lineal de respuesta al impulso $T(t)$. Hallar la respuesta del sistema a las entradas

   i) $e_3(t) = Y(t).5.e^{-2t}$.

   ii) $e_2(t) = Y(t)\cos(t)$.

Problema 2 (10 puntos)

A la izquierda de la figura se muestra un modelo simplificado de un motor de inducción monofásico (sistema electromecánico) operando en régimen sinusoidal. La potencia disipada en R representa la potencia mecánica entregada a la carga más pérdidas rotacionales de vacío (fricción en rodamientos, histéresis, etc.) (según el esquema de la derecha de la figura). El campo inducido por la inductancia L es el que magnetiza el circuito magnético del motor, y se mantiene constante. Se pide:

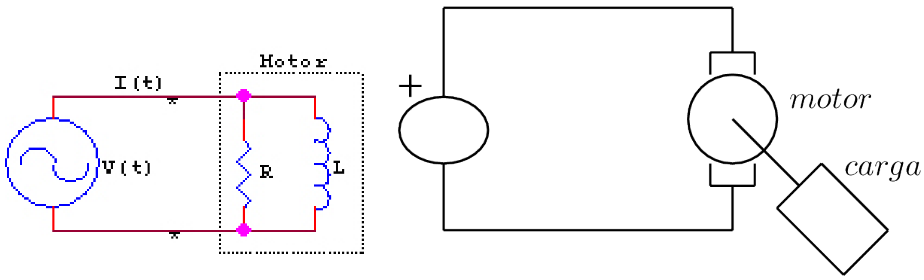
a) Realizar un diagrama fasorial del circuito, incluyendo las tensiones y corrientes de **<u>todos</u> los elementos del circuito**.

b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

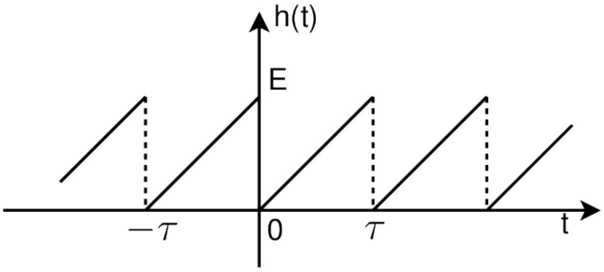
c) Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular analíticamente, ayudándose con el diagrama fasorial, el valor del condensador que anule la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.

a) Repetir la parte a), para el **circuito compensado**.

Los datos del modelo son: $v(t) = 311 \sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$.



Problema 3 (12 puntos)



Se considera la señal periódica $h(t)$ de la figura.

a) Hallar el valor medio y la potencia media de $h(t)$.

b) Hallar y bosquejar su derivada segunda como distribución ($\tilde{T}_h''$).

c) Verificar que, en un periodo, la derivada segunda vale $-E.\delta'(s)$.

d) Hallar los coeficientes de Fourier de $\tilde{T}_h''$.

e) Hallar los coeficientes de Fourier de $h(t)$, $c_n(h)$, para $n \neq 0$, **a partir de los de** $\tilde{T}_h''$.

f) Enunciar el Teorema de Parseval para señales periódicas y aplicarlo al caso particular de $h(t)$.

g) Calcular la atenuación que, en régimen, sufre el tercer armónico de la señal al pasar por un filtro pasabajos R-L, de transferencia en régimen

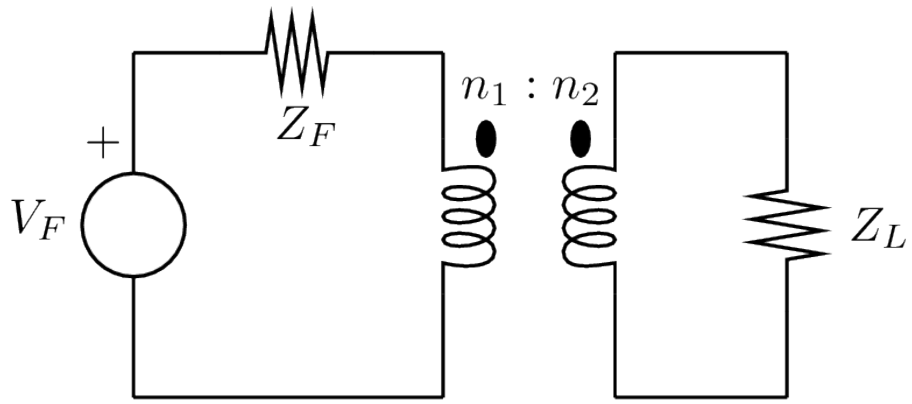
$$H(j\omega) = \frac{\omega_C}{j\omega + \omega_C}$$

siendo $\omega_C = \frac{6\pi}{\tau}$.

Problema 4 (10 puntos)

a) Se considera un transformador ideal, con n_1 vueltas en el primario y n_2 vueltas en el secundario, con una impedancia carga Z_L conectada en el secundario. Hallar analíticamente la impedancia vista desde el primario.

b) En el circuito en fasores de la figura, el transformador es ideal. Se asumen conocidos los valores de V_F, fasor de la fuente de tensión, Z_F, impedancia de salida de la fuente y n_1 y n_2, las vueltas del primario y secundario del transformador ideal. Hallar el valor de Z_L que maximiza la potencia activa disipada en Z_L. Enuncie claramente los resultados que utiliza.



Solución

Problema 1

a) Para verificar que T es la inversa de S como distribución, hacemos su convolución y vemos que da la δ de Dirac.

$$T(t) \star S(t) = \left[Y(t) + \delta'(t)\right] \star Y(t)\cos(t) = Y(t) \star Y(t)\cos(t) + \delta'(t) \star Y(t)\cos(t)$$

Recordando que convolucionar con $\delta'(t)$ equiavle a derivar como distribución, y aplicando la regla de derivación de una distribución por una función C^∞ el segundo término vale

$$\delta'(t) \star Y(t)\cos(t) = Y'(t)\cos(t) + Y(t)(-\sin(t)) = \cos(t)\delta(t) - Y(t)\sin(t) = \delta(t) - Y(t)\sin(t)$$

Hemos usado que la derivada del escalón es la δ de Dirac y que $\alpha(t)\delta(t) = \alpha(0)\delta(t)$ para toda función $\alpha(t)$ infinitamente diferenciable.

La convolución correspondiente al primer término podemos calcularla en funciones. Al ser funciones con soporte en la semirrecta positiva, su convolución también lo será. Para instantes positivos, vale

$$Y(t) \star Y(t)\cos(t) = \int_0^t \cos(x)dx = \sin(t)$$

de donde

$$Y(t) \star Y(t)\cos(t) = Y(t)\sin(t)$$

Sumando ambos términos, obtenemos el resultado deseado.

b) Para calcular las respuestas del sistema lineal a las distints entradas, tenemos que hacer la convolución de las entradas con la respuesta al impulso del sistema.

i) $r_1(t) = T(t) \star Y(t).5.e^{-2t}$. De forma similar a lo ya hecho, vemos que la respuesta consta de dos términos. El primero es $Y(t) \star Y(t).5.e^{-2t}$ que, para tiempos positivos da

$$\int_0^t 5.e^{-2x}dx = -\frac{5}{2}.\left[e^{-2x}\right]_0^t = -\frac{5}{2}.\left[e^{-2t} - 1\right] \Rightarrow Y(t) \star Y(t).5.e^{-2t} = -\frac{5}{2}.Y(t).\left[e^{-2t} - 1\right]$$

y un segundo término $\delta'(t) \star Y(t).5.e^{-2t} = 5\delta(t) - 10Y(t).e^{-2t}$, de donde

$$r_1(t) = 5\delta(t) - 10Y(t).e^{-2t} - \frac{5}{2}.Y(t).\left[e^{-2t} - 1\right] = 5\delta(t) + \frac{5}{2}.Y(t) - \frac{25}{2}Y(t).e^{-2t}$$

ii) Al poner como entrada del sistema la inversa de la respuesta al impuslo, obtenemos como respuesta el impulso:

$$r_2(t) = \left[Y(t) + \delta'(t)\right] \star Y(t)\cos(t) = \delta(t)$$

Problema 2

Es el Ejercicio 9 del Práctico 5.

Problema 3

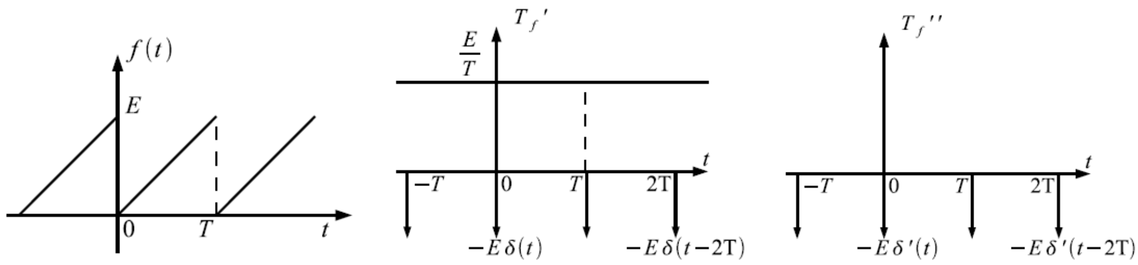
a) El valor medio de h, que es el coeficiente de continua de la serie de Fourier, vale

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\frac{E\tau}{2} = \frac{E}{2}}$$

La potencia media, en tanto, vale

$$\boxed{P = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{E^2}{\tau^2}t^2 dt = \frac{E^2}{3}}$$

b) Para derivar la señal periódica como distribución, al ser seccionalmente derivable, la derivamos como función donde es derivable y agregamos δ's de Dirac en los puntos de discontinuidad, con las amplitudes dadas por las magnitudes de los saltos. La derivada com ofunción, donde es derivable, es constante y vale E/τ. Debemos agregar la presencia de una δ de Dirac de amplitud $-E$ en cada múltiplo entero de τ. Obtenemos entonces que la derivada primera es una distribución constante menos un peine de Dirac de amplitud E. Al derivar de nuevo, la parte constante se va y obtenemos la derivada del peine de Dirac, es decir, una δ' de amplitud $-E$ en cada múltiplo entero de τ.



(a) $f(t)$ (b) T'_f (c) T''_f

c) De la parte anterior, resulta inmediato que la distribución $T''_h(s) \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ asociada a $\tilde{T}''_h(t)$ es $-E\delta'(s)$ (en un periodo solo vemos una δ' de amplitud $-E$.

d) De la definición de coeficiente de Fourier de una distribucón, definiendo $\omega = 2\pi/\tau$ y aplicando la definición de derivada de una distribucón, sabemos que

$$c_n(\tilde{T}''_h) = \frac{1}{\tau}\left\langle T''_h(s), e^{-jn\omega s}\right\rangle = -\frac{E}{\tau}\left\langle \delta'(s), e^{-jn\omega s}\right\rangle = -\frac{Ejn\omega}{\tau}\left\langle \delta(s), e^{-jn\omega s}\right\rangle = -\frac{Ejn\omega}{\tau} = -\frac{Ejn2\pi}{\tau^2}$$

Resumiendo

$$\boxed{c_n(\tilde{T}''_h) = -\frac{Ejn2\pi}{\tau^2}}$$

e) Para calcular los coeficientes de Fourier de h (que coinciden con los de $\tilde{T}_h$) para $n \neq 0$, a partir de los de $\tilde{T}''_h$, usamos que

$$c_n(\tilde{T}''_h) = (jn\omega)^2.c_n(\tilde{T}_h) \rightarrow c_n(h) = -\frac{c_n(\tilde{T}''_h)}{(n\omega)^2} = -\frac{-\frac{Ejn2\pi}{\tau^2}}{n^2\frac{4\pi^2}{\tau^2}} = \frac{jE}{2n\pi} \Rightarrow \boxed{c_n(h) = \frac{jE}{2n\pi} \quad , \ n \neq 0}$$

f) El Teorema de Prseval nos dice que

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} |h(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathcal{Z}} |c_n(h)|^2$$

De la parte a) sabemos que $P = \frac{E^2}{3}$. Por otro lado, al ser h una señal real, $|c_n(h)| = |c_{-n}(h)|$, de donde

$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} |c_n(h)|^2 = |c_0(h)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(h)|^2 = \frac{E^2}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^2}{4n^2\pi^2}$$

Entonces

$$\boxed{\frac{E^2}{3} = \frac{E^2}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^2}{4n^2\pi^2}}$$

Observemos que de aquí sale una aplicación directa de Parseval al cálculo de series:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

g) Para calcular la atenuación pedida, debemos explicitar cuál es la relación entre la respuesta en régimen y la entrada periódica en un sistema lineal. Si la entrada es periódica, de pulsación ω_0:

$$e(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} c_n(e).e^{jn\omega_0 t}$$

la respectiva salida en régimen también ser"a periódica, del mismo periodo, y con serie de Fourier

$$r(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} c_n(e).H(jn\omega_0).e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir, los coeficientes de Fourier de la entrada se modifican por el valor de la transferencia en el respectivo armónico. La atenuación pedida va a estar dada por

$$\alpha_3 = \frac{|c_3(r)|}{|c_3(e)|} = |H(j3\omega_0)| = |H(j3\omega_0)| = \left|\frac{\omega_C}{j3\omega_0 + \omega_C}\right|$$

Considerando que $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$, observamos que $\omega_C = 3\omega_0$. Obtenemos

$$|H(j3\omega_0)| = \left|\frac{3\omega_0}{j3\omega_0 + 3\omega_0}\right| = \left|\frac{1}{j+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Observemos en aprticular que el argumento de la transferencia en el tercer armónico vale $-\frac{\pi}{4}$. El tercer armónico de la entrada vale

$$\frac{jE}{6\pi}e^{j3\omega_0 t} - \frac{jE}{6\pi}e^{-j3\omega_0 t} = -\frac{E}{3\pi}\sin(3\omega_0 t)$$

El tercer armónico de la salida vale

$$-\frac{E}{3\sqrt{2}\pi}\sin\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Problema 4

a) Para pasar la impedancia al primario, escribimos las ecuaciones del transformador ideal, en fasores eficaces:

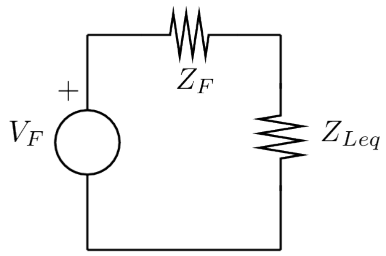
$$\begin{cases} \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \\ n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

siendo V_1 y V_2 las tensiones del primario y del secundario, medidas desde los puntos, e I_1 e I_2 las corrientes del primario y secundario, entrando por los puntos. Con estas convenciones, la tensión del secundario coincide con V_L, la tensión en bornes de Z_L, en tanto que I_2 es la opuesta de I_L, corriente por Z_L medida en el sentido de la caída V_L.

La impedancia vista por el primario del trafo ideal es

$$\boxed{Z_{Leq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{n_1}{n_2} V_2}{-\frac{n_2}{n_1} I_2} = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{V_L}{-I_L} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L}$$

b) El circuito equivalente queda así: Calculemos entonces la tensión y la corriente en la impedancia Z_{Leq},



para obtener la potencia consumida por ella:

$$V_{Leq} = V_F \frac{Z_{Leq}}{Z_F + Z_{Leq}} \quad , \quad I_{Leq} = V_F \frac{1}{Z_F + Z_{Leq}}$$

donde hemos aplicado el divisor de tensión. La potencia entonces vale:

$$P_L = P_{Leq} = re\left(V_{Leq}\overline{I_{Leq}}\right) = re\left(V_F \frac{Z_{Leq}}{Z_F + Z_{Leq}} \overline{V_F} \overline{\frac{1}{Z_F + Z_{Leq}}}\right) = \frac{|V_F|^2}{|Z_F + Z_{Leq}|^2} re(Z_{Leq})$$

Para continuar, escribamos $Z_F = R_F + jX_F$ y $Z_{Leq} = R_{Leq} + jX_{Leq}$, con R_F y R_{Leq} no negativas. Entonces

$$P_L = P_{Leq} = \frac{|V_F|^2}{(R_F + R_{Leq})^2 + (X_F + X_{Leq})^2} R_{Leq}$$

Para maximizar P_L, hacemos el gradiente respecto de R_{Leq} y X_{Leq}:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_L}{\partial R_{Leq}} = |V_F|^2 \frac{(R_F^2 - R_{Leq}^2) + (X_F + X_{Leq})^2}{\left[(R_F + R_{Leq})^2 + (X_F + X_{Leq})^2\right]^2} \\ \\ \frac{\partial P_L}{\partial X_{Leq}} = |V_F|^2 \frac{2R_{Leq}(X_F + X_{Leq})}{\left[(R_F + R_{Leq})^2 + (X_F + X_{Leq})^2\right]^2} \end{cases}$$

Es claro que el segundo elemento del gradiente de P_L se anula para $R_{Leq} = 0$ y también para $X_{Leq} = -X_F$. El primer valor lo descartamos, ya que daría potencia nula!! Con el segundo valor, y considerando el primer elemento del gradiente, obtenemos $R_{Leq} = R_F$ (descartamos valores negativos de R_{Leq}).

Entonces, para maximizar la potencia en la impedancia de carga, ésta debe valer:

$$Z_{Leq} = R_F - jX_F = \overline{Z_F} \Rightarrow \boxed{Z_L = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \overline{Z_F}}$$