Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2014

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (10 puntos)

a) Sea f una señal periódica de periodo T. A partir de los coeficientes de Fourier de f, hallar los coeficientes de Fourier de

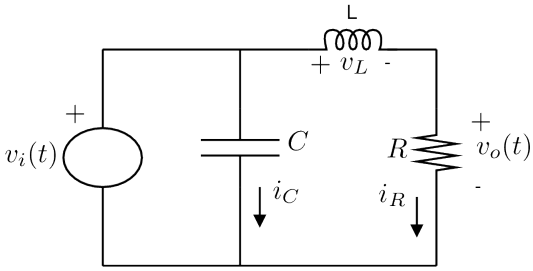
$$g(t) = f(t) + f(t + \frac{T}{2})$$

b) Calcular los coeficientes de Fourier de la señal $f(t)$ que corresponde al seno rectificado de media onda, de periodo T y graficar el espectro de dicha señal.

c) Observando que el seno rectificado de onda completa se puede escribir como $g(t) = f(t) + f(t + \frac{T}{2})$, calcular los coeficientes de Fourier de la señal rectificada de onda completa.

d) Graficar el espectro de $g(t)$.

e) ¿Cómo puede interpretar la ausencia de armónicos impares?



Problema 2 (9 puntos)

El circuito de la figura se alimenta con una fuente sinusoidal $v_i(t) = V \cos(\omega_o t)$. Se cumple que

$$V_i = 100V \quad , \quad R = 5\Omega \quad , \quad L = 0,866Hy \quad , \quad C = 5000\mu F$$

a) Indique para qué valores de frecuencia la amplitud de la corriente i_R (corriente en régimen por la resistencia R) supera los 10 A.

En adelante se utilizará la máxima frecuencia del conjunto de las posibles halladas en la parte anterior.

b) Calcular los fasores asociados a las corrientes i_R e i_C y a las tensiones v_R y v_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

c) Dar la expresión temporal de la tensión en régimen en bornes de la resistencia.

d) Calcular la potencia aparente, activa y reactiva entregadas por la fuente.

e) Se desea compensar la potencia reactiva. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y cómo lo conectaría.

Problema 3 (9 puntos)

Se sabe que la respuesta de un circuito a una entrada impulsiva fue la función $h(t) = Y(t).e^{-at}$.

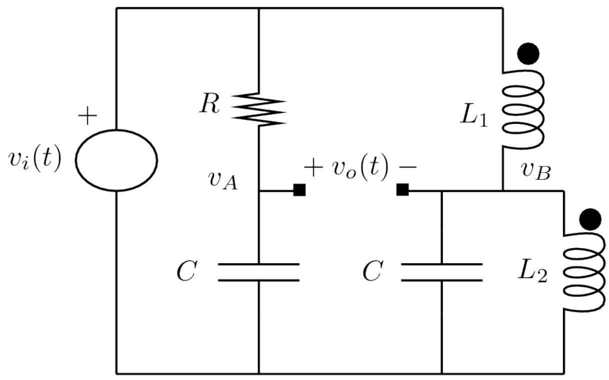
a) Calcular la respuesta para la entrada e(t)=Y(t).

b) Idem para $e(t) = Y(t).e^{-bt}$.

Problema 4 (12 puntos)

a) i) Escribir las ecuaciones que describen el funcionamiento de un transformador, con inductancia del primario L_1, inductancia del secundario L_2 y mutua M.

ii) Sea $K = \frac{n_1}{n_2}$, la relación de vueltas entre el primario y el secundario. Hallar la relación entre la tensión del primario y la del secundario para el caso particular de que el transformador sea perfecto.



Se considera el circuito de la figura, que contiene un transformador perfecto, con $K = 2$.

b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

c) Para la entrada

$$v_i(t) = A.\cos\left(\frac{1}{RC}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

hallar la respectiva respuesta en régimen, indicando en particular, las relaciones de amplitud y fase con la entrada.

d) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual la respectiva respuesta en régimen sea nula?

e) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual el sistema introduce una ganancia de exactamente $\frac{1}{2}$. (Sugerencia: buscar $\omega_1 = \alpha\frac{1}{RC}$, con α real).

Solución

Problema 1

a) Por definición, siendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}$$

Denotemos $f(t+\frac{T}{2})$ como $f_{\frac{T}{2}}(t)$. Haciendo el cambio de variable $t = u + \frac{T}{2}$, tenemos que

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(u+\frac{T}{2}\right)e^{-jn\omega_0(u+\frac{T}{2})} = e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}}c_n(f_{\frac{T}{2}})$$

Sabemos que

$$e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}} = e^{-jn\pi} = (-1)^n$$

De donde

$$c_n(f_{\frac{T}{2}}) = (-1)^n c_n(f)$$

Como $g(t) = f(t) + f_{\frac{T}{2}}(t)$. Es claro que g admite el periodo T, aunque puede verse que su periodo es $\frac{T}{2}$. Los coeficientes de Fourier, asumiendo periodo T, verifican

$$c_n(g) = c_n(f) + c_n(f_{\frac{T}{2}}) = c_n(f)\left[1+(-1)^n\right]$$

Los coeficientes pares se duplican y se anulan los coeficientes impares.

b) El seno rectificado de media onda, de pulsación ω_0 y periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ vale, en un periodo

$$f(t) = \begin{cases} A.\sin(\omega_0 t) & , \quad 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

Por definición de coeficiente de Fourier de una función, tenemos que

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Entonces, para $n^2 \neq 1$,

$$c_n(f) = \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[\frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[\frac{e^{+j(1-n)\omega_0 t} - e^{-j(1+n)\omega_0 t}}{2j}\right]dt$$

$$c_n(f) = \frac{A}{2jT}\left[\left.\frac{e^{+j(1-n)\omega_0 t}}{+j(1-n)\omega_0}\right|_0^{\frac{T}{2}} - \left.\frac{e^{-j(1+n)\omega_0 t}}{-j(1+n)\omega_0}\right|_0^{\frac{T}{2}}\right] = \frac{A}{2jT}\left[\frac{e^{+j(1-n)\omega_0\frac{T}{2}}-1}{+j(1-n)\omega_0} + \frac{e^{-j(1+n)\omega_0\frac{T}{2}}-1}{j(1+n)\omega_0}\right]$$

$$c_n(f) = \frac{A}{2jT\omega_0}\left[\frac{e^{+j(1-n)\pi}-1}{+j(1-n)} + \frac{e^{-j(1+n)\pi}-1}{j(1+n)}\right] = \frac{A\left(e^{-jn\pi}+1\right)}{4\pi}\left[\frac{1}{(1-n)} + \frac{1}{(1+n)}\right]$$

$$c_n(f) = \frac{A\left(e^{-jn\pi}+1\right)}{4\pi}\left[\frac{1+n+1-n}{(1-n^2)}\right] = \frac{A\left(e^{-jn\pi}+1\right)}{2\pi(1-n^2)}$$

Para n par no nulo,

$$c_n(f) = \frac{A}{\pi(1-n^2)}$$

Para n impar distinto de ± 1, el coeficiente de Fourier es nulo. Restan por calcular el valor medio y los coeficientes de Fourier de la fundamental.

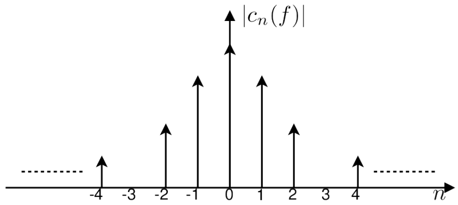
$$c_0(f) = \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_0 t) = \frac{A}{T}\left[\left.\frac{-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\right|_0^{\frac{T}{2}}\right] = \frac{A}{\pi}$$

$$c_1(f) = \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left[\frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right] e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{A}{2jT}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j2\omega_0 t} dt\right] = \frac{A}{4j} = \overline{c_{-1}(f)}$$

Resumiendo:

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{A}{4j} & , \; n = 1 \\ -\frac{A}{4j} & , \; n = 1 \\ 0 & , \; n \; impar \; , \; |n| > 1 \\ \frac{A}{\pi(1-n^2)} & , \; n \neq 0 \; , \; par \\ \frac{A}{\pi} & , \; n = 0 \end{cases}$$

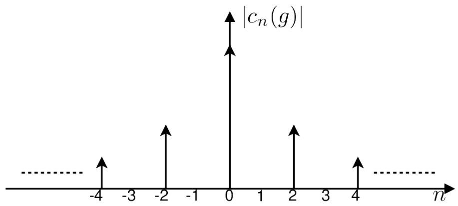
El espectro se muestra en la siguiente gráfica:



c) Usando lo anterior, los coeficientes de Fourier del seno rectificado de onda completa valen

$$c_n(g) = \begin{cases} 0 & , \; n \; impar \\ \frac{2A}{\pi(1-n^2)} & , \; n \neq 0 \; par \\ \frac{2A}{\pi} & , \; n = 0 \end{cases}$$

d) El espectro se muestra en la siguiente gráfica:



e) La ausencia de armónicos impares en g puede explicarse considerando que el periodo real de g es $\frac{T}{2}$.

Problema 2

Se presentan las ecuaciones involucradas. Se deja al alumno la sustitución por los valores indicados y la obtención de lo svalores finales.

a) Denotemos por I_0 la corriente umbral dada. Entonces, sabemos que en fasores

$$I_R = \frac{V_i}{R + Lj\omega_0}$$

por lo que, en el tiempo

$$i_R(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - atan(L\omega_0/R))$$

Entonces, se debe cumplir que

$$\frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}} \geq I_0 \Rightarrow \frac{V^2}{R^2 + L^2\omega_0^2} \geq I_0^2 \Rightarrow |\omega_0| \leq \frac{V^2 - R^2 I_0^2}{L^2}$$

La frecuencia máxima es $f_{max} = \frac{V^2 - R^2 I_0^2}{2\pi L^2} Hz$, $w_{max} = \frac{V^2 - R^2 I_0^2}{L^2} rad/s$

b) En fasores,

$$I_R = \frac{V_i}{R + Lj\omega_{max}} \quad , \quad I_C = V_i C j\omega_{max} \quad , \quad V_R = RI_R \quad , \quad V_L = Lj\omega_{max} I_R$$

Los fasores se muestran en el diagrama fasorial que sigue. Observar los ángulos rectos involucrados.

d) La potencia activa entregada por la fuente es $P = R|I_R|^2$, pues la resistencia es la única que consume activa. La reactiva es consumida por la bobina y el condensador:

$$Q = Q_L + Q_C = L\omega_{max}|I_R|^2 - |V_i|^2 C\omega_{max}$$

La potencia aparente es $S = P + jQ$.

d) Observando que la fuente entrega reactiva, podemos compensarla colocarlo un elemento que entregue reactiva. Para no alterar la potencia activa, ccolocamos un condensador en bornes de la fuente, en paralelo con la carga. El valor C_C sale de la identidad

$$Q_{C_C} = |V_i|^2 C_C \omega_{max} = Q \Rightarrow C_C = \frac{Q}{|V_i|^2 C_C}$$

Problema 3

Es el ejercicio 9 del práctico 4.

Problema 4

a) i) Para las tensiones medidas desde los puntos y las corrientes entrando por los puntos, las ecuaciones del transformador son las siguientes

$$\begin{cases} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= L_2 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

ii) Si el transformador es perfecto, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, entonces

$$\begin{cases} v_1(t) &= \sqrt{L_1}\left(\sqrt{L_1}\frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2}\frac{di_2}{dt}\right) \\ v_2(t) &= \sqrt{L_2}\left(\sqrt{L_2}\frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1}\frac{di_1}{dt}\right) \end{cases}$$

Entonces, considerando que las autoinductancias son proporcionales al cuadrado del número de vueltas del bobinado,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} = K$$

b) Para hallar la transferencia en régimen sinusoidal, observamos que tenemos dos ramas en paralelo, con tensiones intermedias V_A y V_B, y que la salida es la tensión $V_A - V_B$. En la rama $R - C$, planteamos un divisor de tensión

$$V_A = V_i\left(\frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R + \frac{1}{Cj\omega}}\right) = V_i\left(\frac{1}{1 + RCj\omega}\right)$$

En la rama que está el transformador perfecto, la tensión V_B es la del secundario, en tanto la V_i es la suma de las tensiones de primario y secundario, que son proporcionales entre sí. Entonces

$$V_i = V_1 + V_2 = (1+K)V_2 = (1+K)V_B \Rightarrow V_B = \frac{V_i}{1+K}$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{V_A - V_B}{V_i} = \frac{V_i\left(\frac{1}{1+RCj\omega} - \frac{1}{1+K}\right)}{V_i} = \frac{1 + K - 1 - RCj\omega}{(1+K)(1+RCj\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{K - RCj\omega}{(1+K)(1+RCj\omega)}$$

c) Para una entrada sinusoidal pura, sabemos que la respectiva respuesta en régimen es también sinusoidal pura, de la misma frecuencia, con una ganancia en amplitud igual al módulo de la transferencia a la frecuencia de trabajo y con una relación de fase con la entrada dada por el argumento de la transferencia a la frecuencia de trabajo. Es decir, para

$$v_i(t) = A\cos\left(\frac{1}{RC}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

la respuesta en régimen es

$$v_o(t) = A.\left|H(j\omega)\right|_{\omega=\frac{1}{RC}} \cos\left(\frac{1}{RC}t + \frac{\pi}{4} + arg\left(H(j\omega)\right)_{\omega=\frac{1}{RC}}\right)$$

Calculemos, para $K = 2$:

$$H(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{RC}} = \frac{2 - RCj\frac{1}{RC}}{(3)(1 + RCj\frac{1}{RC})} = \frac{2 - j}{(3)(1+j}$$

Entonces

$$|H(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{RC}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \quad , \quad arg\left(H(j\omega)\right)_{\omega=\frac{1}{RC}} = atan\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

De donde

$$v_o(t) = A.\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.\cos\left(\frac{1}{RC}t + atan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

d) Para que la salida en régimen sea nula, debe ser nulo su fasor asociado y, por lo tanto, debe ser nulo el numerador de la transferencia, lo cual no ocurre para ningún valor real de ω.

e) Por lo ya expresado en la parte c), debemos buscar ω_1 que cumpla $|H(j\omega_1)| = \frac{1}{2}$. Para simplificar, busquemos $\omega_1 = \alpha.\frac{1}{RC}$:

$$|H(j\omega_1)| = \left|\frac{2 - RCj\frac{\alpha}{RC}}{(3)(1 + RCj\frac{\alpha}{RC})}\right| = \left|\frac{2 - j\alpha}{(3)(1 + j\alpha)}\right| = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$\frac{1}{4} = \frac{4+\alpha^2}{9(1+\alpha^2)} \Rightarrow 9 + 9\alpha^2) = 16 + 4\alpha^2 \Rightarrow 5\alpha^2 = 7 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$$