Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2013

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (8 puntos)

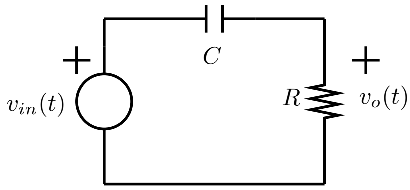
Se considera la señal $v_{in}(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + A_5 \cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$, con $\omega_0 > 0$ y $A_0 \neq 0$.

a) Mostrar que v_{in} es periódica y hallar su periodo.

b) Hallar los coeficientes de Fourier de v_{in} $(c_n(v_{in}))$.

c) Hallar la potencia media de v_{in} $(P_m(v_{in}))$.

Se considera el circuito de la figura, al que se le inyecta la señal v_{in}. Sea v_o la respectiva respuesta en régimen.

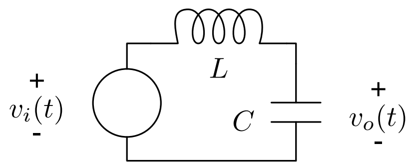


d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (Justificar!!)

i) El valor medio de v_o es nulo.

ii) El valor medio de v_o no es nulo.

Problema 2 (8 puntos)



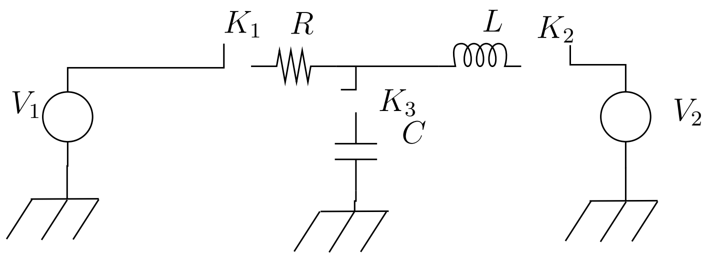
a) Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$ en el circuito de la figura, con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

b) Hallar una distribución $T(t)$ tal que $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$.

c) Hallar la inversa de $T(t)$ en $\mathbb{D}'_+$.

d) Hallar $v_o(t)$ si $v_i(t) = 1V \cdot Y(t)$.

Problema 3 (11 puntos)



a) Considere el circuito de la figura, en el que se tiene que: $V_1 = 230V sen(\omega t)$ y $V_2 = 250V cos(2\omega t)$. Se cierran los interruptores K_1, K_2 y K_3. Se pide hallar la corriente $i_C(t)$ que circula por C en régimen. **Sugerencia: utilice el Principio de Superposición.**

b) Por alguna razón desconocida el interruptor K_2 se abre. Sin considerar los efectos transitorios que esto produce, se pide ahora calcular la corriente en régimen que circula por R, L y C. Además se pide hallar la tensión en régimen en bornes de C.

c) Considere que $R = 5\Omega$, $L = 2mHy$ y $C = 6\mu F$. Realice un diagrama fasorial en el que se incluyan las corrientes pedidas en **b)** y la tensión en bornes del condensador, tomando como origen de fases la tensión de la fuente de alimentación V_1.

d) Se modela la impedancia que la fuente de tensión V_1 como $Z = R + jX$. Indicar, **justificando**, si $X > 0$ o $X < 0$.

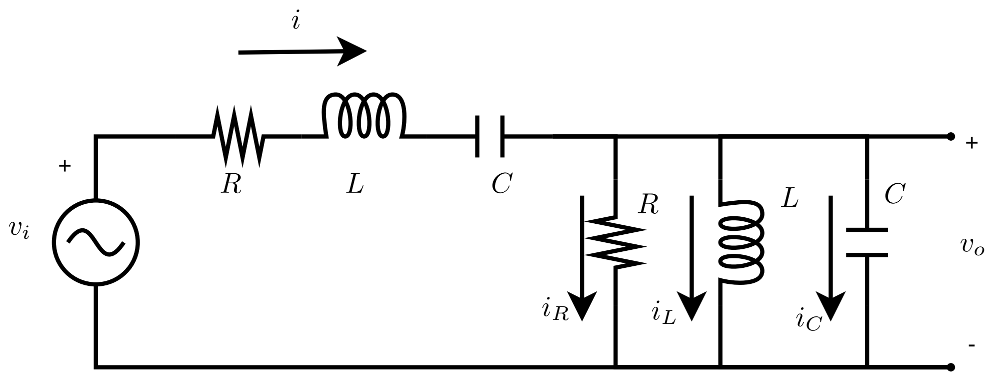
e) Se desea compensar la potencia reactiva que entrega la fuente V_1, sin alterar la potencia activa que consume Z.

   i) Indique cómo lo hace, calculando el/los componente/s que sean necesario/s.

   ii) ¿Cuánto vale la parte imaginaria de la impedancia resultante que ve la fuente de tensión V_1?

Problema 4 (13 puntos)

Sea el circuito de la figura, trabajando en régimen sinusoidal.



a) Determinar la frecuencia de trabajo ω_0 a la cual el sistema se comporta como un divisor de tensión puramente resistivo. Expresar el resultado sólamente en función de el producto de L y C.

b) Para la frecuencia de trabajo ω_0 calculada en la parte anterior, realizar un diagrama fasorial en el que se incluyan los fasores de v_i, v_o, i, i_R, i_C e i_L.

c) Si $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$, calcular las potencias activa, reactiva y aparente entregada por la fuente. Expresar el resultado sólo en función de R y A.

d) Hallar la transferencia $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. (Se sugiere dejarla expresada como el cociente de dos polinomios en $(j\omega)$).

e) Consideremos $R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ y que la entrada es $v_i(t) = A\cos(2\omega_0 t)$. Hallar la expresión temporal de $v_o(t)$ en régimen.

Solución

Problema 1

a) La señal $v_{in}(t)$ es la suma de una constante no nula, una señal periódica de periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y una señal periódica, cuyo periodo es $\frac{T_0}{5}$, es decir, un submúltiplo entero del periodo de la anterior. Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$v_{in}(t + T_0) = v_{in}(t)$$

siendo T_0 el mínimo tiempo para el cual eso ocurre.

b) Podemos describir la señal $v_{in}(t)$ así:

$$v_{in}(t) = A_0 + A_1 \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] + A_5 \left[\frac{e^{j(5\omega_0 t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(5\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}}{2}\right]$$

De donde:

$$c_0(v_{in}) = A_0 \quad , \quad c_1(v_{in}) = c_{-1}(v_{in}) = \frac{A_1}{2} \quad , \quad c_5(v_{in}) = \overline{c_{-5}(v_{in})} = \frac{A_5}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

y el resto de los coeficientes de Fourier son nulos.

c) Por el Teorema de Parseval, tenemos que

$$P_m(v_{in}) = \frac{1}{T} \int_0^T |v_{in}(t)|^2) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(v_{in})|^2 = A_0^2 + 2\frac{A_1^2}{4} + 2\frac{A_5^2}{4} = A_0^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_5^2}{2}$$

d) La transferencia en régimen del circuito de la figura $H(j\omega)$ se calcula mediante un divisor de tensión en el circuito equivalente en fasores:

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = \frac{R}{\frac{1}{Cj\omega} + R} = \frac{RCj\omega}{1 + RCj\omega}$$

Se puede apreciar que a bajas frecuencias la ganancia es pequeña, verificándose que $H(j0) = 0$. Por lo tanto, en régimen de continua, la ganancia es nula. Sabemos que para una entrada periódica, de descomposición de Fourier

$$v_{in}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(v_{in}) e^{jn\omega_0 t}$$

un circuito lineal responde en régimen de la siguiente forma

$$v_o(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(v_o) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(v_{in}) H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

de donde el valor medio de la respuesta en régimen es el valor medio de la entrada multiplicado por la ganancia en continua. Por lo tanto, la afirmación correcta es la i).

Problema 2

Este es el Ejercicio 6 del Práctico 4.

Problema 3

a) Siguiendo la sugerencia primero anulamos la fuente de frecuencia ω. Por divisor de tensión, la tensión en bornes de C es:

$$V_c(2\omega) = \frac{(R//\frac{1}{j2\omega C})}{(R//\frac{1}{j2\omega C}) + j2\omega L} V_2 \tag{0.1}$$

Por lo tanto la corriente por C es:

$$I_c(2\omega) = j2\omega C \frac{(R//\frac{1}{j2\omega C})}{(R//\frac{1}{j2\omega C}) + j2\omega L} 250V \tag{0.2}$$

Ahora, anulando la otra fuente de tensión la corriente por C queda como sigue:

$$I_c(\omega) = j\omega C \frac{(j\omega L//\frac{1}{j\omega C})}{(j\omega L//\frac{1}{j\omega C}) + R} 230V \tag{0.3}$$

Por lo tanto, la expresión temporal de la corriente por C queda como sigue:

$$i_C(t) = |I_c(\omega)| sen(\omega t + < I(\omega)) + |I_c(2\omega)| cos(2\omega t + < I(2\omega)) \tag{0.4}$$

b) Claramente por la bobina no circulará corriente en régimen. Por lo tanto:

$$i_L(t) = 0 \tag{0.5}$$

Luego, la corriente por R será (en régimen) la misma que por C. Por lo tanto:

$$I_C = \frac{230V}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{0.6}$$

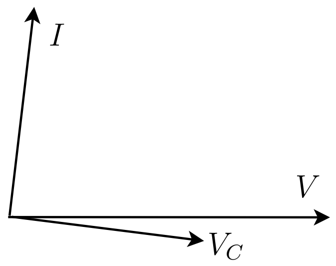
Entonces:

$$i_C(t) = |I_c| sen(\omega t + < I_c) \tag{0.7}$$

Finalmente, la tensión en bornes de C queda como sigue:

$$V_C = I_C \frac{1}{j\omega C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} 230V \tag{0.8}$$

Pasando al tiempo:



$$v_C(t) = |V_c| sen(\omega t + < V_c) \tag{0.9}$$

c) Sustituyendo los valores dados:

$$I = 0.43A < 1.56rad \tag{0.10}$$

$$V_c = 229.99V < -0.09rad \tag{0.11}$$

d) Claramente, observando el diagrama fasorial de la parte anterior, se ve que la impedancia que ve la fuente de tensión V_1 se puede modelar como una impedancia $Z = R + jX$, de tipo capacitivo, con $X < 0$. Esto es así dado que la corriente consumida por la carga (la serie de R y C) se adelanta respecto del fasor de tensión de la fuente.

e) i) La reactiva que entrega el condensador se puede expresar como sigue:

$$Q_C = -\omega C \frac{|V_1|^2}{1 + (\omega RC)^2} \tag{0.12}$$

Para compensar, colocamos una bobina en paralelo con la carga. La que consume la bobina se puede expresar como:

$$Q_L = \frac{|V_1|^2}{\omega L} \tag{0.13}$$

Imponiendo la condición de compensación:

$$Q_L + Q_C = 0 \tag{0.14}$$

Resulta que:

$$L = 1.68Hy \tag{0.15}$$

ii) Vale cero.

Problema 4

a) Para que el sistema se comporte como un divisor puramente resistivo ambas impedancias del divisor deben ser reales. Esto se logra tanto en el paralelo como en la serie, cuando la impedancia del capacitor es opuesta a la impedancia del inductor. Es decir, se debe cumplir $Lj\omega_0 = -\frac{1}{Cj\omega_0} = \frac{j}{C\omega_0}$. Por lo tanto: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. En ese caso $H(j\omega_0) = \frac{1}{2}$.

b) Para la frecuencia de trabajo calculada $V_o = \frac{V_i}{2}$, $I = I_R = \frac{V_i}{2R}$, $I_L = \frac{V_o}{Lj\omega}$ e $I_C = Cj\omega V_o$.

Es decir I, I_R, V_i y V_o son colineales e I_L e I_C son perpendiculares a los demás fasores, I_L está atrasado $\frac{\pi}{2}$ e I_C adelantado. Todo esto se muestra en la figura 1

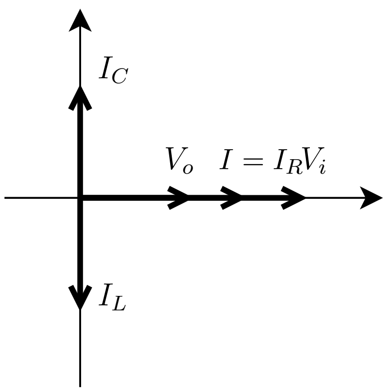


Figura 1: Diagrama fasorial del Problema 4

c) $S = \frac{V_i \overline{I}}{2} \overset{I=\frac{V_i}{2R}}{=} \frac{|V_i|^2}{4R} = \frac{A^2}{4R}$, $P = \frac{A^2}{4R}$, $Q = 0$.

d) Usando divisor de tensión:

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{1}{1+\left(R+Lj\omega+\frac{1}{Cj\omega}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Lj\omega}+Cj\omega\right)} \\
&= \frac{1}{\left(4+\frac{R}{Lj\omega}+\frac{Lj\omega}{R}+RCj\omega+\frac{1}{RCj\omega}+LC(j\omega)^2+\frac{1}{LC(j\omega)^2}\right)} \\
&= \frac{LC(j\omega)^2}{(LC)^2(j\omega)^4+LC\left(\frac{L}{R}+RC\right)(j\omega)^3+4LC(j\omega)^2+\left(RC+\frac{L}{R}\right)j\omega+1}
\end{aligned}
$$

e) Tenemos que evaluar $H(j2\omega_0)$.

$$H(j2\omega_0) = \frac{-4}{16-16j-16+4j+1} = \frac{-4}{1-12j} \simeq 0.33\measuredangle -95$$

Por lo tanto la salida será: $v_o(t) = 0.33A\cos(2\omega_0 t - 95)$