Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2011

Recomendaciones generales:

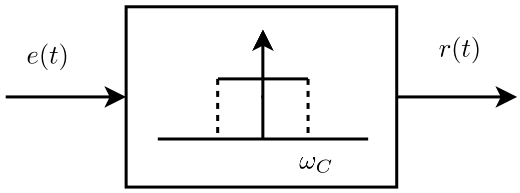
- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (7 puntos)

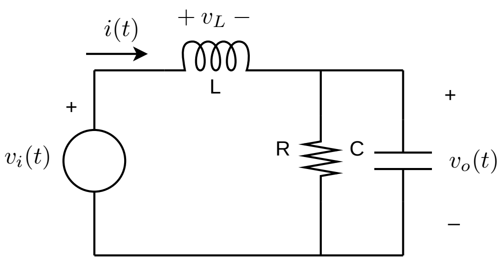
a) Hallar los coeficientes de Fourier del diente de sierra de pendiente unitaria, periodo $T = 2\pi$ y valor medio nulo.

b) Hallar la potencia media de dicha señal.

c) Hallar la potencia media de la respuesta en régimen para el sistema de la figura, cuando la entrada es el diente de sierra de las partes anteriores y el sistema se comporta como un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\omega_C = \frac{5\pi}{T}$.



Problema 2 (8 puntos)



a) Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$ en el circuito de la figura.

b) Hallar una distribución $T(t)$ tal que $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$.

c) Para $LC = \tau^2$ y $L/R = 2\tau$, hallar la inversa de $T(t)$ en $\mathbb{D}'_+$.

d) Hallar la respuesta $v_o(t)$ del circuito a un escalón en la entrada $v_i(t)$.

Problema 3 (13 puntos)

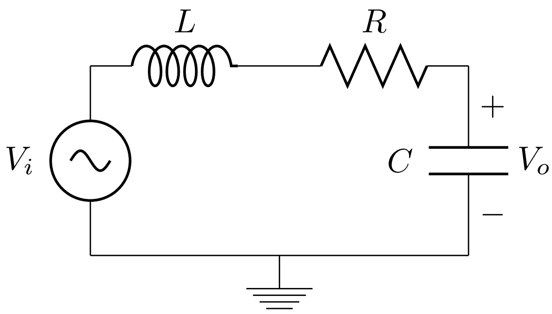
a) Sea un sistema lineal del cual se conoce la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, donde $Y(j\omega)$ es el fasor asociado a la salida en régimen del sistema y $X(j\omega)$ el fasor asociado a la entrada. Sea $f(t)$ una señal periódica que se coloca como entrada del sistema. Calcular los coeficientes de Fourier de la salida en función de los de la entrada.

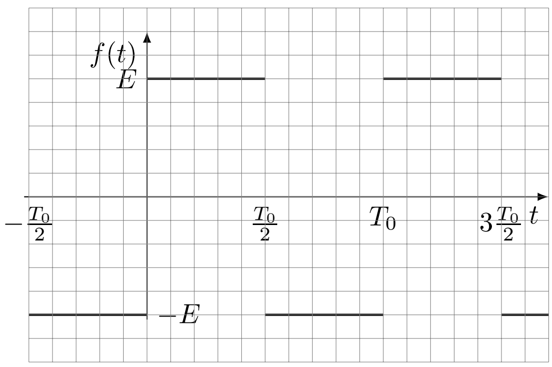
b) En el circuito de la figura, hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

c) Para el sistema de la parte anterior consideramos ahora que se cumple la relación $4\,L\,C = (R\,C)^2$; verifique que la transferencia se puede escribir de la forma

$$H(j\,\omega) = \frac{\omega_c^2}{(j\,\omega + \omega_c)^2}$$

Determine ω_c en función de R y C





De aquí en más se utilizarán las relaciones de la parte anterior así como la expresión dada para $H(j\omega)$ Asumamos ahora que la entrada al sistema es una onda cuadrada como la de la figura, donde la pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ cumple $\omega_0 = 10\,\omega_c$.

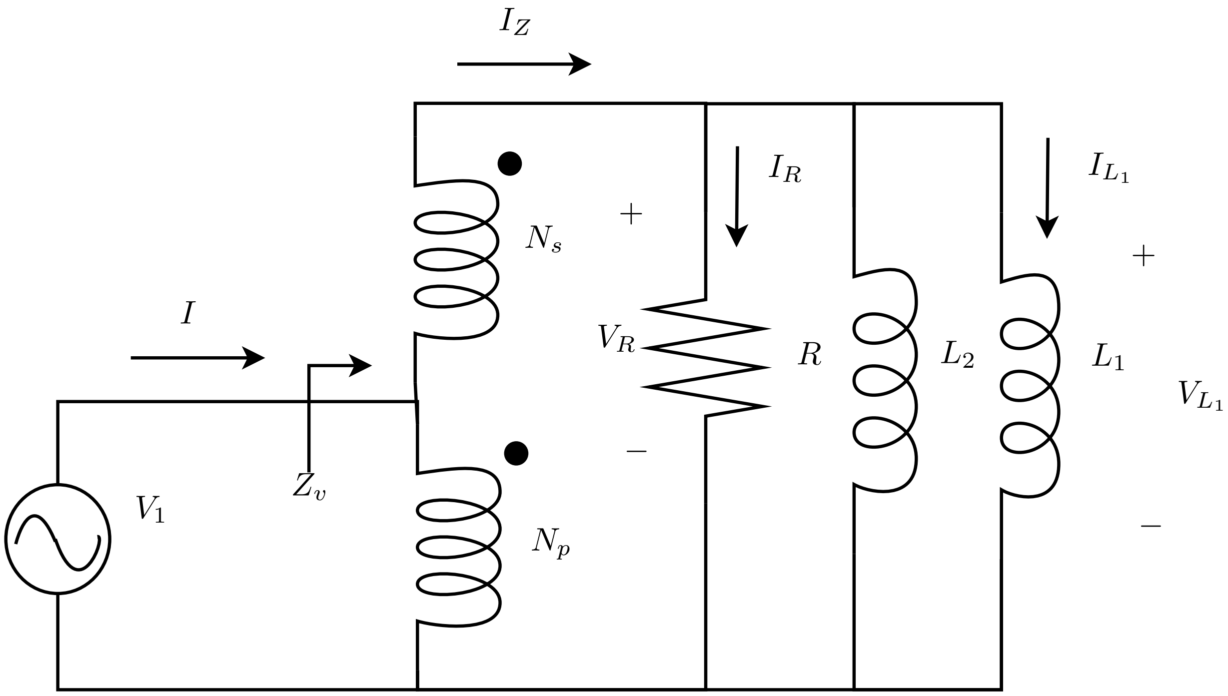
d) Asumiendo conocidos los coeficientes de Fourier de la entrada, hallar la expresión de los coeficientes de Fourier de la salida en régimen.

e) Calcular el valor medio de la salida en régimen.

f) A partir de lo hallado en la parte d), y observando que ω_c se puede despreciar respecto a ω_0, hallar aproximadamente la salida en régimen, bosquejando la forma de la misma.

Problema 4 (12 puntos)

En el circuito de la figura contiene un transformador **ideal**, donde N_s es el número de vueltas del secundario y N_p en el primario. Se excita el sistema mediante una fuente sinusoidal V_1 de frecuencia angular ω. Asumiremos que el circuito se encuentra en régimen sinusoidal y que R, L_1 y L_2 son datos del problema.



a) Calcular a los fasores V_R, V_{L_1}, I_R e I_{L_1} en función de la tensión de la fuente V_1.

b) Realizar un diagrama fasorial que contenga a los fasores calculados en la parte anterior además de I_Z (corriente hacia la carga), I (corriente que entrega la fuente) y V_1. Explique claramente cómo construye el diagrama, explicando los ángulos notables, las colinealidades y los cuadrantes donde se ubican los distintos fasores.

c) Calcular la impedancia vista por la fuente, $Z_v = \frac{V_1}{I}$, indicada en la figura. Mostrar que se puede escribir como el paralelo de una resistencia R_{eq} y una inductancia L_{eq}. Calcular dichas componentes.

d) ¿Es posible compensar la potencia reactiva colocando un elemento en paralelo a la fuente de tensión? En caso afirmativo indicar, qué elemento debe colocarse y de qué valor.

Solución

Problema 1

Parte a)
Derivemos el diente de sierra ($f(t)$) dos veces com distribución. La derivada primera es la función constante igual a 1 y un peine de Dirac de amplitud -2π, de periodo 2π, con asiento en múltiplos impares de π. Al derivar por segunda vez, sólo nos queda la derivada del peine. Obtenemos la distribución periódica que en un periodo es $T''_f(s) = -2\pi\delta'(s-\pi)$ ($\in \mathcal{D}'(\Gamma)$). Calculemos el respectivo coeficiente de Fourier:

$$c_n(\tilde{T}''_f) = \frac{1}{\tau} < T''_f(s), e^{-jn\omega s} >$$

con $\tau = 2\pi$ y $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 1$. Entonces, aplicando la definición de derivada de una distribución y la definición de la delta de Dirac:

$$c_n(\tilde{T}''_f) = \frac{1}{2\pi} < -2\pi\delta'(s-\pi), e^{-jns} >=< \delta(s-\pi), (-jn)e^{-jns} >= -(jn)(-1)^n$$

La relación entre los coeficientes de Fourier de una distribución y los de su derivada segunda viene dada por la siguiente expresión:

$$c_n(\tilde{T}_f) = \frac{c_n(\tilde{T}''_f)}{(jn\omega)^2} = \frac{-(jn)(-1)^n}{(jn)^2}$$

(esta expresión no vale para el valor medio, pero en este caso el valor medio es nulo). Entonces, el coeficiente de Fourier del diente de sierra vale

$$c_n(f) = j\frac{(-1)^n}{n}$$

Parte b)
La potencia media la calculamos directamente de su definición:

$$P_m(f) = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Parte c)
La frecuencia de corte del filtro es mayor que la del segundo armónico y menor que la del tercer armónico, por lo que sólamente pasarán los dos primeros armónicos. La potencia media de la salida es, entonces:

$$P_{msal} = 2 * (|c_1(f)|^2 + |c_2(f)|^2) = \frac{5}{2}$$

que corresponde aproximadamente al 75 % de la potencia media de la señal de entrada.

Problema 2

Parte a)
Planteando la malla y las relaciones de los elementos, obtenemos:

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t) \quad , \quad v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \quad , \quad i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_o(t)$$

siendo $i_C(t)$ la corriente por el condensador. Por otro lado:

$$R(i(t) - i_C(t)) = R\left(i(t) - C\frac{d}{dt}v_o(t)\right) = v_o(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}\left(v_o(t) + RC\frac{d}{dt}v_o(t)\right)$$

de donde

$$v_i(t) = L\frac{d}{dt}\frac{1}{R}\left(v_o(t) + RC\frac{d}{dt}v_o(t)\right) + v_o(t) = \left(LC\frac{d^2}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{d}{dt} + 1\right)v_o(t)$$

Parte b)
Usando que la delta de Dirac es el neutro del producto convolución y que derivar una distribución es lo mismo que convolucionarla con la derivada de la delta de Dirac, tenemos que $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$, con

$$T(t) = LC\delta''(t) + \frac{L}{R}\delta'(t) + \delta(t)$$

Parte c)
Para $LC = \tau^2$ y $L/R = 2\tau$, resulta

$$T(t) = \tau^2\delta''(t) + 2\tau\delta'(t) + \delta(t)$$

Para hallar T^{-1}, aplicamos el Teorema[1] que dice que $T^{-1} = Y(t)f(t)$, siendo f una función con derivada segunda continua, solución de la siguiente ecuación diferencial en funciones:

$$\tau^2 f'' + 2\tau f' + f = \;\; ; \;\; f(0) = 0 \;\; , \; f'(0) = \frac{1}{\tau^2}$$

El polinomio característico de esta ecuación direrencial homogénea es $(\tau\lambda + 1)^2) = 0$ y tiene la siguiente raiz doble $\lambda = -1/\tau$. Entonces

$$f(t) = (A + Bt)e^{t/\tau}$$

Con las condiciones iniciales, calculamos A y B:

$$A = 0 \;\; , \;\; B = \frac{1}{\tau^2}$$

Resulta $T^{-1}(t) = Y(t)\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}$.

Parte d)
Para hallar la respuesta al escalón, planteamos la convolución:

$$v_o(t) = Y(t) * Y(t)\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau^2}\int_0^t xe^{-x/\tau}dx = 1 - e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$$

Problema 3

[1] Observar que como el operador diferencial no está normalizado, debemos ajustar las condiciones iniciales indicadas en el Teorema.

Parte a)
Cómo se muestra en la sección 5.4 de las notas del curso, los coeficientes de Fourier de la salida son:

$$c_n[g] = c_n[f].H(jn\omega_0)$$

Donde llamamos g a la salida y ω_0 es la frecuencia fundamental de f, es decir, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ donde T_0 es el período de f. Parte b)

Aplicando divisor de tensión es fácil ver que

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{C\,j\omega}}{R + L\,j\omega + \frac{1}{C\,j\omega}} = \frac{1}{L\,C(j\omega)^2 + R\,C\,j\omega + 1}$$

Parte c)

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{L\,C}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}\,j\omega + \frac{1}{L\,C}} = \frac{\left(\frac{2}{R\,C}\right)^2}{(j\omega)^2 + 2\frac{2}{R\,C}\,j\omega + \left(\frac{2}{R\,C}\right)^2} = \frac{\omega_C^2}{(j\omega + \omega_C)^2}$$

Donde $\omega_C = \frac{2}{R\,C}$

Parte d)
Usando la expresión de la parte (a), con la transferencia de la parte anterior tenemos:

$$c_n[g] = c_n[f].\frac{\omega_C^2}{(jn\omega_0 + \omega_C)^2} = c_n[f].\frac{1}{(1 + j10n)^2}$$

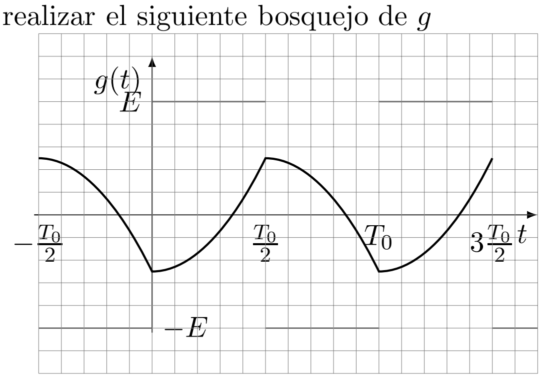
Parte e)

Como el valor medio de la entrada ($c_0[f]$) es nulo, el valor medio de la salida es $c_0[g] = c_0[f]\,H(0) = 0$ Parte

f)
Cómo sugiere la letra podemos despreciar ω_C respecto a ω_0 por lo que podemos asumir $n\omega_0 \gg \omega_C$ o sea que los coeficientes de Fourier de la salida quedan:

$$c_n[g] \simeq c_n[f]\frac{\omega_C^2}{(j\,n\,\omega_0)^2}$$

Conociendo la relación entre los coeficientes de Fourier de una función y su derivada, podemos ver que f es la derivada segunda de g multiplicada por ω_C^2, cómo también sabemos que g tiene valor medio nulo podemos realizar el siguiente bosquejo de g



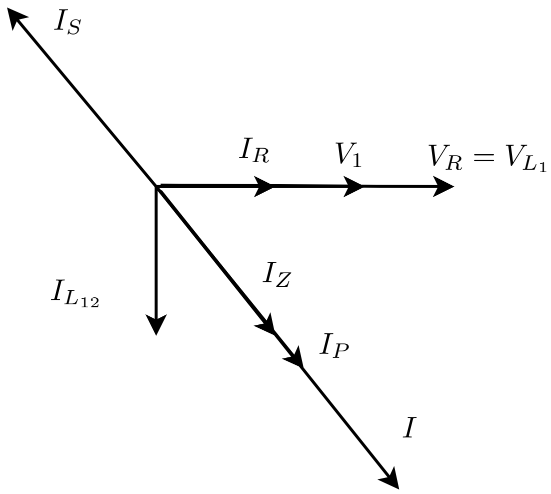
Donde bosquejamos la salida cómo parábolas con curvatura positiva cuando $f > 0$ y negativa cuando $f(t) < 0$. Para que eso quede mas claro superponemos el gráfico de f en el bosquejo.

Problema 4

Parte a)

$$V_{L_1} = V_R = V_S + V_P = \left[\frac{N_S + N_P}{N_P}\right] V_1$$
$$I_{L_1} = \left[\frac{N_S + N_P}{N_P}\right] \frac{V_1}{L_1 j\omega}$$
$$I_R = \left[\frac{N_S + N_P}{N_P}\right] \frac{V_1}{R}$$

Parte b)



$I_{L_{12}} = I_{L_1} + I_{L_2}$
Parte c)

$$Z_v = \left[\frac{N_P}{N_S + N_p}\right]^2 (R||L_1 j\omega||L_2 j\omega)$$

Entonces $R_{eq} = \left[\frac{N_P}{N_S+N_p}\right]^2 R$, $L_{eq} = \left[\frac{N_P}{N_S+N_p}\right]^2 \frac{L_1 L_2}{L_1+L_2}$.

Parte d)
Es posible pues la carga es inductiva. Hay que colocar un condensador de valor

$$C = \frac{1}{L_{eq}\omega^2}$$

lo que asegura que la fuente ve una carga resistiva pura.