Sistemas Lineales 1

Primer Parcial, 2010

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (12 puntos)

En el circuito de la figura 1 se muestra un transformador **ideal**, donde V_1 es la tensión en el primario y V_2 la tensión en el secundario. La cantidad de vueltas en el primario y secundario, se puede ajustar moviendo el borne que se indica con una flecha. El número TOTAL del vueltas en la bobina es n. Definimos el parámetro $x \in [0, 1]$, de modo que xn es el numero de vueltas en el secundario.

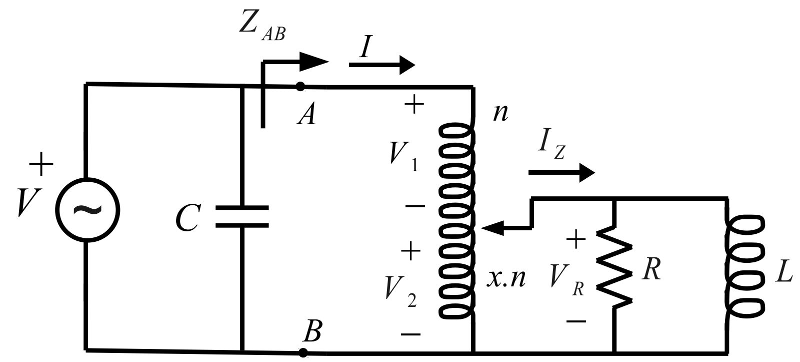


Figura 1:

(a) Calcular la impedancia viste desde AB (Z_{AB})

Considerando la tensión en la fuente como entrada y la corriente I_z como salida, calcular:

(b) La función transferencia en regimen sinusoidal $H(j\omega)$

(c) I) Calcular la frecuencia ω^* (en función de los parámetros del problema), tal que el fasor correspondiente a la salida se encuentre **retrasado** $\pi/4$ respecto al fasor de la entrada.

II) Para dicha frecuencia, y para $R = 50\Omega$, hallar x sabiendo que para una entrada de amplitud 100V, la salida en régimen tiene una amplitud de 1A.

(d) Suponiendo que: la frecuencia de trabajo sigue siendo ω^* (calculada en la parte anterior), $R = 50\Omega$ y ademas se cumple que $\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}01\Omega^{-1}$. Calcular x para que no se consuma potencia reactiva a la fuente.

Problema 2 (8 puntos)

(a) Considere dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe la convolución $h = f * g$. Muestre que si g es periódica, de periodo τ, entonces h también lo es.

(b) Considere el pulso de ancho $2T$ y altura A mostrado en la figura 2. Halle y grafique $h = f * f$.

(c) A partir del pulso de la parte anterior, se define

$$g(t) = f(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4nT)$$

Halle y grafique $\tilde{h} = f * g$.

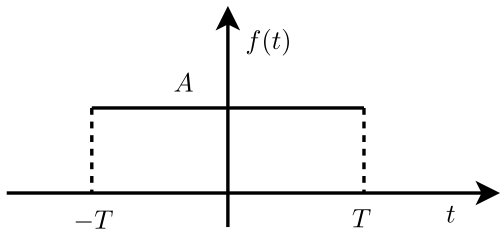


Figura 2: Pulso de altura A y ancho $2T$.

Problema 3 (8 puntos)

(a) Considere la función $Y(t)e^{-\frac{5t}{\tau}}$. Muestre que su distribución asociada T verifica la ecuación

$$T' + \frac{5}{\tau}T = \delta$$

(b) Considere el circuito de la figura 3. Se toma la tensión v_i como señal de entrada y la corriente i como señal de salida.

i) Halle una relación diferencial entre v_i e i (verifique las dimensiones).

ii) Halle una distribución T tal que

$$i = T * v_i \quad , \quad \forall v_i$$

iii) Halle la salida para la entrada $v_i(t) = E.Y(t)$.

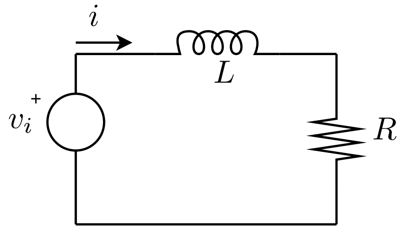


Figura 3: Circuito del Problema 3.

Problema 4 (12 puntos)

En el circuito de la figura 4, en el cual el transformador es perfecto y la frecuencia de trabajo es 50 Hz.

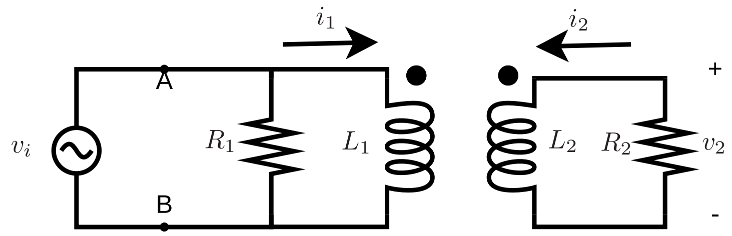


Figura 4: Circuito del problema 4

(a) Relacionar en un diagrama fasorial los fasores de v_i, v_2, i_1 e i_2.

(b) Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente se coloca un elemento de compensación entre los puntos A y B.

   i) Calcular el fasor de la corriente que debe circular por elemento de compensación, en función del fasor V_i y ubicarla en el diagrama de la parte anterior.

   ii) ¿Qué tipo de elemento se debe colocar y cuál debe ser su valor?

A partir de ahora, se tienen los siguientes datos:

$$L_1 = 1Hy \qquad L_2 = 62{,}5mHy \qquad R_1 = 222\Omega \qquad R_2 = 19{,}625\Omega$$

(c) Hallar la impedancia total equivalente vista por la fuente incluyendo el elemento de compensación.

(d) En el circuito de la figura 5, hallar $v_1(t)$ e $i_1(t)$ sabiendo que los elementos son los mismos que en la figura 4 y que:

$$L_C = 0{,}1Hy \qquad R_C = 31{,}4\Omega \qquad v_i = 311V\cos(314s^{-1}t + \frac{\pi}{3})$$

(e) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente de la figura 5

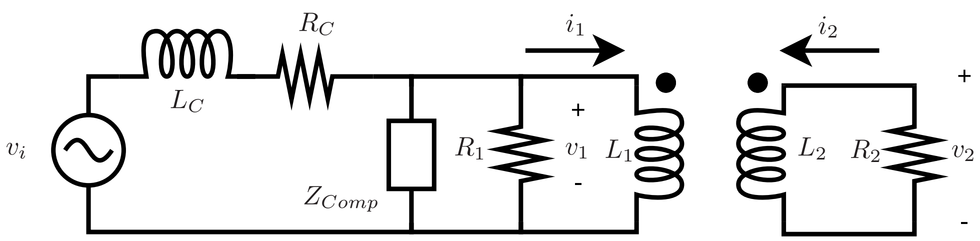
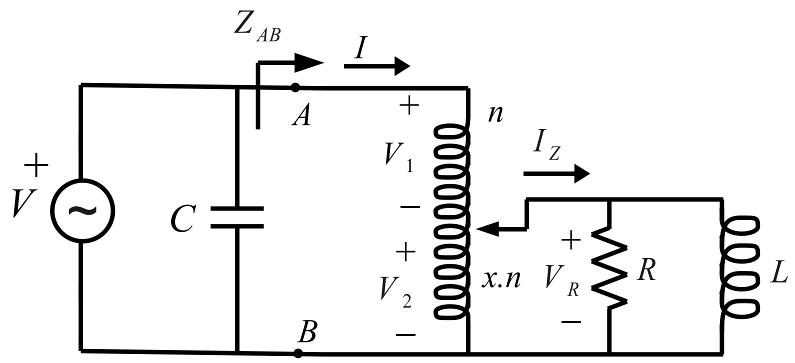


Figura 5: Circuito del problema 4

Solución

Problema 1



(a) Planteamos las ecuaciones para el transformador, obteniendo:

$$\frac{V_2}{nx} = \frac{V_1}{(1-x)n} \Rightarrow \boxed{V_1 + V_2 = V_{in} = V_2\left(1 + \frac{1-x}{x}\right) = \frac{V_Z}{x}}$$

$$I_1\, n(1-x) = -I_2\, nx \Rightarrow \boxed{I_1 - I_2 = I_Z = I_1\left(1 + \frac{1-x}{x}\right) = \frac{I}{x}}$$

Por ultimo,

$$\frac{V}{I} = Z_{AB} = \frac{V_Z}{I_Z}\frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{Z_{AB} = \frac{R\|j\omega L}{x^2}}$$

(b) Utilizando las ecuaciones de la parte anterior, podemos escribir:

$$V_Z = V_i\, x \Rightarrow I_Z = \frac{V_i\, x}{R\|j\omega L} \Rightarrow H(j\omega) = x\frac{R + j\omega L}{jR\omega L}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{x}{R}\frac{R/L + j\omega}{j\omega}}$$

(c) Utilizamos la función de transferencia calculada en la parte anterior.

i) Para que la salida se encuentre restrasada $\pi/4$ debemos buscar la frecuencia (ω^*) para la cual $\arg(H(j\omega^*)) = -\pi/4$.

$$arg\,(H(j\omega)) = arg\left(\frac{x}{R}\frac{R/L + j\omega}{j\omega}\right) = -\pi/4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R}{L} = \omega^*}$$

ii) Para la frecuencia calculada antes, la transferencia queda

$$H(j\omega^*) = \frac{x}{R}\frac{1+j}{j}$$

El modulo de la transferencia, nos da la atenuación introducida por el sistema para dicha frecuencia.

$$|H(j\omega^*)| = \frac{x}{R}\sqrt{2}$$

Buscamos el valor de x tal que a la frecuencia ω_0 es sistema atenúa 100 veces la entrada, es decir,

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{100} \Rightarrow x = \frac{R}{100\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

(d) Para que no se consuma potencia reactiva, podemos imponer que la impedancia vista por la fuente sea real, de donde obtenemos:

$$\frac{1}{C\omega^*} = \frac{L\omega^*}{x^2} \Rightarrow x = \omega^*\sqrt{LC} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 50 \cdot 0{,}01 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Problema 2

(a) Tenemos $T(t) = Y(t)e^{-\frac{5t}{\tau}}$. Para hallar T', derivamos la función donde es derivable y agregamos deltas de Dirac en los puntos de discontinuidad, con la amplitud del salto:

$$T' = Y(t).\left(-\frac{5}{\tau}\right).e^{-\frac{5t}{\tau}} + \delta(t) \Rightarrow T' + \frac{5}{\tau}T = \delta$$

(b) i) Planteando la malla del circuito, usando las leyes de funcionamiento de las componentes y definiendo el operador diferencial

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{5}{\tau}\right)$$

obtenemos

$$v_i = L(Di)$$

con $\frac{\tau}{5} = \frac{L}{R}$.

ii) Como $Di = D(\delta * i) = (D\delta) * i$, entonces:

$$i = \frac{1}{L}(D\delta)^{-1} * v_i$$

Sabemos que la solución elemental S del operador D verifica

$$DS = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{5}{\tau}\right)S = S' + \frac{5}{\tau}S = \delta$$

Entonces, por parte I,

$$S(t) = Y(t).e^{-\frac{5t}{\tau}}$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso del sistema es

$$h(t) = \frac{Y(t)}{L}.e^{-\frac{5t}{\tau}}$$

iii) Calculamos la respuesta a un escalón de amplitud E:

$$i(t) = \frac{Y(t)}{L}.e^{-\frac{5t}{\tau}} * E.Y(t) = \int_0^t \frac{E}{L}.e^{-\frac{5(t-x)}{\tau}}dx = \frac{E}{5R}\left(1 - e^{-\frac{5t}{\tau}}\right)$$

Problema 3

(a) Por definición

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Entonces, para todo t se cumple que

$$h(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t+\tau-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx = h(t)$$

donde hemos usado la periodicidad de g.

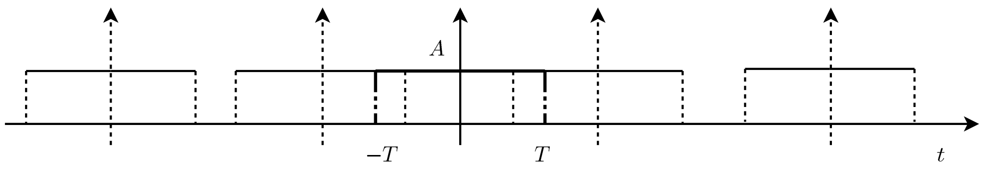


Figura 6: Casos posibles para la convolución de un pulso consigo mismo (el quinto caso corresponde a los dos pulsos coincidiendo).

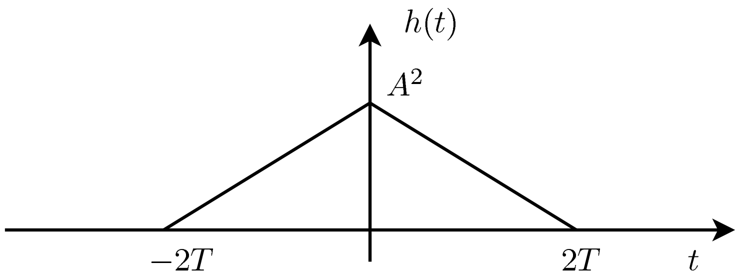


Figura 7: Convolución de un pulso consigo mismo.

(b) Basándonos en el método gráfico de cálculo de la convolución de dos funciones, vemos que tenemos cinco posibles situaciones para determinar el valor de $h(t)$, que se muestran en la figura . Entonces

$$\begin{array}{rcl} t > 2T & \Rightarrow & h(t) = 0 \\ t < -2T & \Rightarrow & h(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq 2T & \Rightarrow & h(t) = A^2.(2T - t) \\ -2T \leq t \leq 0 & \Rightarrow & h(t) = A^2.(2T + t) \end{array}$$

La gráfica de h se muestra en la figura 7.

(c) La función g resulta ser periódica, de periodo $4T$ (verificarlo). Entonces, estamos en las condiciones de la parte a), por lo que ya sabemos que $\tilde{h}$ va a ser periódica de periodo $4T$. Además, razonando otra vez con el método gráfico para calcular la convolución de dos funciones, dejando fija la periódica y moviendo el pulso, vemos que en cada periodo, la función $\tilde{h}$ va a coincidir con el triángulo calculado en la parte b). Su respectiva gráfica se muestra en la figura 8.

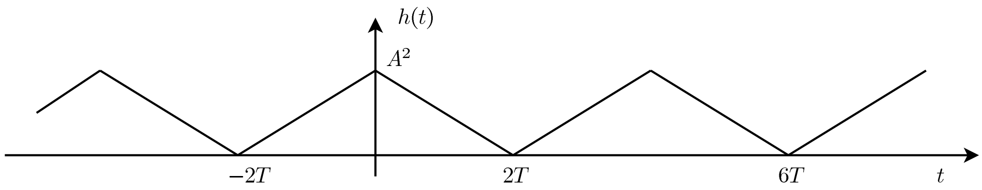


Figura 8: Gráfica de la función $\tilde{h}$ de la parte c).

Problema 4

(a)

Por ser un transformador perfecto $V_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_i$ por lo que V_2 y V_i están alineados. Además $I_2 = -\frac{V_2}{R_2}$ por lo que I_2 está desfazada 180º. Usando una de las ecuaciones del transformador:

$$\begin{aligned} V_i &= L_1 j\omega I_1 + \sqrt{L_1 L_2} j\omega I_2 = L_1 j\omega I_1 - \sqrt{L_1 L_2} j\omega \frac{V_2}{R_2} \\ &= L_1 j\omega I_1 - L_2 j\omega \frac{V_1}{R_2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad V_i \left(1 + \frac{L_2}{R_2} j\omega\right) &= L_1 j\omega I_1 \\ \Rightarrow \ I_1 = \frac{1 + \frac{L_2}{R_2} j\omega}{L_1 j\omega} V_i &= \left(\frac{1}{L_1 j\omega} + \frac{L_2}{R_2 . L_1}\right) V_i \end{aligned} \tag{2}$$

El ángulo entre V_i y I_1 es $\arctan\left(\frac{L_2\omega}{R_2}\right) - \frac{\pi}{2}$, que está en el cuarto cuadrante. El diagrama resultante se muestra en la figura 9

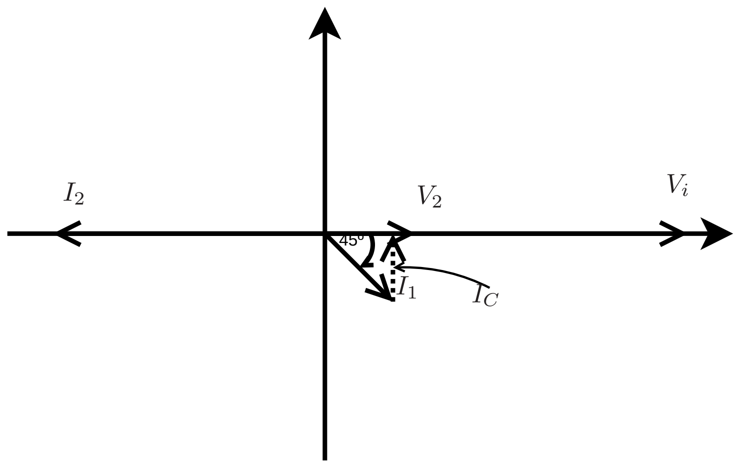


Figura 9: Diagrama fasorial

(b)

i) Calcular el fasor de la corriente que debe circular por elemento de compensación, en función del fasor V_i y ubicarla en el diagrama de la parte anterior. La corriente por el elemento de compensación debe hacer que la corriente total sea colineal con V_i. De la ecuación 2 vemos que la corriente es $I_C = -\frac{1}{L_1 j\omega} V_i = \frac{j}{L_1 \omega} V_i$

ii) Que tipo de elemento se debe colocar y cual debe ser su valor? Como el circuito es inductivo hay que colocar un condensador

$$Cj\omega = \frac{I_C}{V_i} = \frac{j}{L_1\omega} \ \Rightarrow \ C = \frac{1}{L_1\omega^2} \tag{3}$$

(c)

La corriente que entrega la fuente es

$$I_i = (I_1 + I_C) + I_{R_1} = \frac{L_2}{R_2 . L_1} V_i + \frac{V_i}{R_1}$$

, el primer término sale directamente de la ecuación 2 ya que I_C cancela la parte perpendicular al fasor V_i de la corriente que toma el transformador.

$$Z_T = \frac{R_2 L_1}{L_2} || R_1 = \frac{1}{\frac{0{,}0625}{19{,}625} + \frac{1}{222}} \Omega = 130{,}05\Omega$$

(d)

Por divisor de voltaje:

$$V_1 = V_i \frac{Z_T}{Z_T + R_C + L_C j\omega} = \left(311V\angle\frac{\pi}{3}\right) \frac{130{,}05}{130{,}05 + 31{,}4 + 31{,}4j} = 246V\angle 0{,}85$$

La ecuación 2 nos da la relación entre I_1 y V_1:

$$I_1 = (0{,}0031847 - 0{,}0031847j)\Omega^{-1} V_1 = \left(0{,}0045\angle - \frac{\pi}{4}\right) \Omega^{-1} V_1$$

por lo que sabemos que I_1 atrasa $\frac{\pi}{4}$ respecto a $V1$

$$I_1 = \left(0{,}0045\angle - \frac{\pi}{4}\right) \Omega^{-1} V_1 = 1{,}11A\angle 0{,}07$$

Pasando los fasores al tiempo:

$$v_1(t) = 246V \cos(314t + 0{,}85) \tag{4}$$
$$i_1(t) = 1{,}11A \cos(314t + 0{,}07) \tag{5}$$

(e)

La amplitud de la corriente entregada por la fuente es:

$$|I_i| = \left| \frac{V_i}{161{,}4 + 31{,}4j} \right| = 1{,}89A$$

El desfazaje entre la corriente y el voltaje es

$$\theta = \arg(V_i) - \arg(I_i) = \arg(161{,}4 + 31{,}4j) = 0{,}19$$

$$P = \frac{1}{2}|V_i||I_i|\cos(\theta) = 288{,}5W \tag{6}$$
$$Q = \frac{1}{2}|V_i||I_i|\sin(\theta) = 56{,}1VAR \tag{7}$$
$$S = P + jQ = 294VA\angle 0{,}19 \tag{8}$$